第 10 講　(平成 19 年 6 月 19 日)

5.3 角運動量と力のモーメント

或る点 P にベクトル $\boldsymbol{A}$ が与えられた時、また別の点 O のまわりのベクトル $\boldsymbol{A}$ のモーメントを

$$[(\boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_O) \times \boldsymbol{A}] \tag{5.66}$$

で定義する。位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ にある質点の運動量 $\boldsymbol{p}$ のモーメント

$$\boldsymbol{M} = [(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_O) \times \boldsymbol{p}] \tag{5.67}$$

を、この質点の点 O のまわりの角運動量という。この質点に力 $\boldsymbol{F}$ が働く時、

$$\boldsymbol{N} = [(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_O) \times \boldsymbol{F}] \tag{5.68}$$

を、点 O のまわりの力のモーメントという。

以下、簡単のため O を座標原点にとり、" 原点のまわりの" を省略する。(しかし、" どのまわりの" かは重要である。)

(1 質点の運動)

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} &= \frac{d}{dt}[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}] = \left[\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p}\right] + \left[\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right] \\ &= m[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}] + [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}] = \boldsymbol{N} \end{aligned} \tag{5.69}$$

より ($[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}] = 0$ に注意)

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{N} \tag{5.70}$$

(この式は、$d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F}$ に類似している。) 特に、$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{r}$ と平行 (中心力) なら、$\boldsymbol{N} = 0$ より $\boldsymbol{M} =$一定、である。これを、「角運動量の保存則」という。

(幾何学的意味)

$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ で囲まれる扇形の部分の面積は近似的に

$$\Delta S = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{r} \times \Delta\boldsymbol{r}] = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{v}\Delta t)]| + O((\Delta t)^2) \tag{5.71}$$

で表される。ここで、$\Delta t \to 0$ の極限をとって

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{2}|[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}] + O(\Delta t)\right) = \frac{1}{2}|[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}]| \tag{5.72}$$

そこで

$$|\boldsymbol{M}| = |[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}]| = m|[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}]| = 2m\frac{dS}{dt} \tag{5.73}$$

つまり、角運動量の大きさは面積速度 (dS/dt) に比例する。一般に、" 角運動量は、質点の運動平面に垂直で、その大きさは面積速度に比例する。" 角運動量の運動方程式 Eq. (5.70) は、力のモーメントが角運動量を変化させることを意味する。

6　質点系の運動

質点系とは、質量 m_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ をもつ質点の集りである。ここでは、質点系の運動方程式や種々の保存則について調べる。

6.1 重心系と実験室系

質点系の各質点間に働く力を内力といい、外界から働く力を外力という。内力には作用・反作用の法則が成り立つ。$\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}$ 各質点の運動量を $\boldsymbol{p}_i=m_i\boldsymbol{v}_i$ とすると、運動方程式は (慣性系で)

$$\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}=\boldsymbol{F}_i^{(o)}+\sum_{j\ (j\neq i)}\boldsymbol{F}_{ij}\qquad(i=1,\cdots,N)\tag{6.1}$$

質点系の全運動量 $\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i$ は

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^{(o)}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\ (j\neq i)}\boldsymbol{F}_{ij}\tag{6.2}$$

を満す。ここに、内力の和は

$$\sum_{i,\ j\ (i\neq j)}\boldsymbol{F}_{ij}=\sum_{i,\ j\ (i<j)}\boldsymbol{F}_{ij}+\sum_{i,\ j\ (i>j)}\boldsymbol{F}_{ij}=\sum_{i,\ j\ (i<j)}(\boldsymbol{F}_{ij}+\boldsymbol{F}_{ji})=0\tag{6.3}$$

より

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}^{(o)}\tag{6.4}$$

ここに

$$\boldsymbol{F}^{(o)}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^{(o)}\tag{6.5}$$

は、外力の和である。もし、質点系に働く外力の和がゼロの場合 (あるいは、外力が全く働かない孤立系ならば)、$\boldsymbol{P}=$ 一定。すなわち、全運動量は保存する。

(重心系)　$\mathcal{K}'$

重心 (質量中心: center of mass) $\boldsymbol{r}_G=(1/M)\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i$ (ここに、$M=\sum_{i=1}^{N}m_i$ は質点系の全質量) が座標原点にある座標系を重心系という。そのような座標系での位置ベクトルは

$$\boldsymbol{r}_i'=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_G\quad(i=1,\cdots,N)\tag{6.6}$$

であり、それは重心からみた位置ベクトルである。実際、重心系での重心は

$$\boldsymbol{r}_G'=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i'=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_G\right)=\boldsymbol{r}_G-\boldsymbol{r}_G=0\tag{6.7}$$

である。また、重心系での各質点の速度は、$\boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_G$ である。ここに $\boldsymbol{v}_G = (d\boldsymbol{r}_G/dt)$ は、重心の速度である。重心系での全運動量は

$$\boldsymbol{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}'_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}'_i = \frac{d}{dt} M \boldsymbol{r}'_G = 0 \tag{6.8}$$

一方

$$\boldsymbol{P}' = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_G\right) = \boldsymbol{P} - M\boldsymbol{v}_G \tag{6.9}$$

より、Eq. (6.8) とあわせて

$$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_G \tag{6.10}$$

つまり、もとの座標系 (実験室系という) での全運動量は、重心に全質量が集まったとみなした時の重心運動の運動量に等しい。また、重心系とは全運動量がゼロの系であるとも言える。

(例: 2 体衝突問題)

外界から遮断された 2 質点系の全質量を $M = m_1 + m_2$ とする。まず、外力が働かないから、全運動量は保存される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_3 + \boldsymbol{p}_4 \\ &= m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2 \times 0 = m_1\boldsymbol{v}_3 + m_2\boldsymbol{v}_4 \\ &= M\boldsymbol{v}_G = \text{一定} \end{aligned} \tag{6.11}$$

ここに、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は衝突前の 2 質点の運動量、$\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ は衝突後の 2 質点の運動量である。そこで、$\boldsymbol{v}_G = (m_1/M)\boldsymbol{v}_1$ を重心の速度、重心を $\boldsymbol{r}_G = (1/M)(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2)$ として

$$\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G \quad , \qquad \boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_G \qquad (i = 1,\ 2) \tag{6.12}$$

また、重心系での粒子 1, 2 の運動量は、衝突前の相対速度を $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - 0 = \boldsymbol{v}_1$ として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= m_1\boldsymbol{v}'_1 = m_1\left(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_G\right) = m_1\left(\boldsymbol{v} - \frac{m_1}{M}\boldsymbol{v}\right) = \frac{m_1 m_2}{M}\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}\ , \\ -\boldsymbol{p} &= m_2\boldsymbol{v}'_2 = m_2\left(0 - \boldsymbol{v}_G\right) = -m_2\frac{m_1}{M}\boldsymbol{v} = -\mu\boldsymbol{v} \end{aligned} \tag{6.13}$$

ここに

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{6.14}$$

を 2 質点系の換算質量という。重心系での全運動量は $\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} = \mu\boldsymbol{v} - \mu\boldsymbol{v} = 0$ である。ついでに、衝突前の全運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \times 0^2 = \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2 + \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{v}^2 \tag{6.15}$$

である。実際

$$\frac{1}{2}M(\boldsymbol{v}_G)^2+\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{v}^2=\frac{1}{2}M\left(\frac{m_1}{M}\boldsymbol{v}_1\right)^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\boldsymbol{v}_1^2=\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2 \tag{6.16}$$

Eq. (6.15) で、$(1/2)M\boldsymbol{v}_G^2$ は重心運動の運動エネルギー、$(1/2)\mu\boldsymbol{v}^2$ は重心系での (相対運動の) 運動エネルギーである。実際

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1'^2+\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2'^2=\frac{1}{2}m_1\left(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_G\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_G\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}m_1\boldsymbol{v}_1^2+\frac{1}{2}m_2\boldsymbol{v}_2^2\right)-(m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2)\cdot\boldsymbol{v}_G+\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2 \\ &= T-\frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2=\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{v}^2 \end{aligned} \tag{6.17}$$

第 11 講　(平成 19 年 6 月 26 日)

6.2 質点系の角運動量

N 個の質点系を考え、$\sum_{i=1}^{N}$ を簡単のため $\sum_i$ と書く。質点系の全角運動量は

$$\boldsymbol{M}=\sum_i\boldsymbol{M}_i=\sum_i[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i]=\sum_i m_i[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i] \tag{6.18}$$

これを、時間 t で微分し、Eq. (6.1) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} &= \sum_i\frac{d}{dt}[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{p}_i]=\sum_i[\boldsymbol{r}_i\times\frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}] \\ &= \sum_i[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(0)}]+\sum_i\sum_{j\neq i}[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}] \end{aligned} \tag{6.19}$$

作用・反作用の法則により $\boldsymbol{F}_{ij}=-\boldsymbol{F}_{ji}$ だから

$$\begin{aligned} \sum_i\sum_{j\neq i}[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}] &= \sum_i\sum_{j\ (i<j)}[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}]+\sum_i\sum_{j\ (j<i)}[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}] \\ &= \sum_i\sum_{j\ (i<j)}[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ij}]+\sum_j\sum_{i\ (i<j)}[\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ji}] \\ &= \sum_i\sum_{j\ (i<j)}[(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ij}] \end{aligned} \tag{6.20}$$

内力が中心力の時 (2 点 $i,\ j$ に働く力が、その質点を結ぶ方向を向く時)、上はゼロ。そこで

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=\sum_i[\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(0)}] \tag{6.21}$$

特に、孤立系 (外力=0) の時

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = 0 \qquad : (\text{質点系の}) \text{ 角運動量保存則} \tag{6.22}$$

(重心運動の分離)

$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ かつ $\boldsymbol{r}_G = (1/M)\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i$ (系の重心) として、Eq. (6.6) の相対座標を用いると、$\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = 0$ より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \sum_i m_i[\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i] = \sum_i m_i \left[(\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_G) \times \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_G)\right] \\
&= \sum_i m_i \left[\boldsymbol{r}'_i \times \frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt}\right] + \left(\sum_i m_i\right)\left[\boldsymbol{r}_G \times \frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\right] \\
&\quad + \left[\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{v}_G\right] + \sum_i m_i \left[\boldsymbol{r}_G \times \frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt}\right] \\
&= \sum_i [\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i] + [\boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{P}]
\end{aligned} \tag{6.23}$$

ここに、$\boldsymbol{P}$ は Eq. (6.10) の質点系の全運動量である。そこで

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{M}' + \boldsymbol{M}_G \quad , \\
\boldsymbol{M}' &= \sum_i [\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i] \qquad : \text{内部角運動量} \quad , \\
\boldsymbol{M}_G &= [\boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{P}] \qquad : \text{座標原点のまわりの重心の角運動量}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

と分解される。ここに、内部角運動量は系の重心のまわりの角運動量である。実際、$\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i = m_i(\boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}_G) = \boldsymbol{p}'_i + m_i \boldsymbol{v}_G$ より

$$\sum_i [(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G) \times \boldsymbol{p}_i] = \sum_i [\boldsymbol{r}'_i \times (\boldsymbol{p}'_i + m_i \boldsymbol{v}_G)] = \sum_i [\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i] = \boldsymbol{M}' \tag{6.25}$$

外力のモーメントも

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N}^{(o)} &= \sum_i \left[\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(o)}\right] = \sum_i \left[(\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_G) \times \boldsymbol{F}_i^{(o)}\right] \\
&= \sum_i \left[\boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i^{(o)}\right] + \left[\boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{F}^{(o)}\right]
\end{aligned} \tag{6.26}$$

ここに、$\boldsymbol{F}^{(o)}$ は Eq. (6.5) の外力の総和である。そこで

$$\boldsymbol{N}^{(o)\prime} = \sum_i \left[\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i^{(o)}\right] \qquad : \text{重心系での外力のモーメント} \tag{6.27}$$

とすると

$$\boldsymbol{N}^{(o)}=\boldsymbol{N}^{(o)\prime}+\left[\boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{F}^{(o)}\right] \tag{6.28}$$

そこで、内力が中心力だとすると

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{M}'+\boldsymbol{M}_G\right)=\boldsymbol{N}^{(o)\prime}+\left[\boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{F}^{(o)}\right] \tag{6.29}$$

だが

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}_G=\left[\boldsymbol{r}_G\times\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}\right]=\left[\boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{F}^{(o)}\right] \tag{6.30}$$

より、$\boldsymbol{M}'+\boldsymbol{M}_G$ の時間変化は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{N}^{(o)\prime}\quad,\qquad\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}_G=\left[\boldsymbol{r}_G\times\boldsymbol{F}^{(o)}\right] \tag{6.31}$$

と分解される。特に、孤立系では、$\forall\boldsymbol{F}_i^{(o)}=0$ より $\boldsymbol{N}^{(o)\prime}=0$, $\boldsymbol{F}^{(o)}=0$ から

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}'=0\quad,\qquad\frac{d}{dt}\boldsymbol{M}_G=0 \tag{6.32}$$

つまり、重心の角運動量も内部角運動量も独立に保存される。(内力を中心力と仮定)

(例：万有引力により引きあう 2 質点系)

運動方程式は

$$m_1\frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt}=\boldsymbol{F}\quad,\qquad m_2\frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt}=-\boldsymbol{F} \tag{6.33}$$

ここに

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{m_1m_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|^2}\frac{\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} \tag{6.34}$$

相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ とすると、$\boldsymbol{F}\parallel\boldsymbol{r}$ より万有引力は中心力である。2 質点系は、内力が中心力で、かつ外力が働かないから、$\boldsymbol{M}'=$一定、かつ $\boldsymbol{M}_G=$一定。重心系での位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_1' &= \boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_G=\boldsymbol{r}_1-\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}=\frac{m_2(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{r}_2' &= \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_G=\boldsymbol{r}_2-\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)}{m_1+m_2}=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}\end{aligned} \tag{6.35}$$

そこで、それぞれ t で微分して m_1, m_2 をかけると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_1' &= m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1'=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}=\mu\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{p}_2' &= m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2'=-\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}=-\mu\dot{\boldsymbol{r}}=-\boldsymbol{p}\end{aligned} \tag{6.36}$$

ここに、$\boldsymbol{p} = \mu\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{v} = (d\boldsymbol{r}/dt)$: 相対速度) は相対運動量であり、$\mu$ は Eq. (6.14) で定義した換算質量である。(重心系での全運動量はゼロ: $\boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} = 0$) 内部角運動量 $\boldsymbol{M}'$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}' &= [\boldsymbol{r}'_1 \times \boldsymbol{p}'_1] + [\boldsymbol{r}'_2 \times \boldsymbol{p}'_2] = [(\boldsymbol{r}'_1 - \boldsymbol{r}'_2) \times \boldsymbol{p}] \\ &= [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}] = \mu[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}] \quad (= \text{一定})\end{aligned} \tag{6.37}$$

であり、これは重心系での角運動量であって、相対運動の角運動量ともよばれる。また、もとの運動方程式 Eq. (6.33) から $(d/dt)(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)$ を作ると、容易に

$$\mu\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{6.38}$$

が示せる。つまり、Eq. (6.33) の 2 体問題は、Eq. (6.38) で表される「換算質量 μ の 1 体問題に帰着される。」相対運動量は $\boldsymbol{p} = \mu\boldsymbol{v}$、相対運動の角運動量は $\boldsymbol{M}' = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}]$ である。

6.3 質点系のエネルギー

もとの運動方程式 Eq. (6.1) と $\boldsymbol{v}_i$ との内積をとり、i で和をとると

$$\sum_i m_i \left(\boldsymbol{v}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt}\right) = \sum_i \left(\boldsymbol{F}_i^{(o)} \cdot \boldsymbol{v}_i\right) + \sum_i \sum_{j\neq i} (\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i) \tag{6.39}$$

ここに、左辺$= (d/dt)(\sum_i (1/2)m_i\boldsymbol{v}_i^2)$. また、作用・反作用の法則により

$$\begin{aligned}\sum_i \sum_{j\neq i} (\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i) &= \sum_i \sum_{j\ (i<j)} (\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i) + \sum_i \sum_{j\ (j<i)} (\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{v}_i) \\ &= \sum_i \sum_{j\ (i<j)} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)\end{aligned} \tag{6.40}$$

そこで、$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j$ とすると、Eq. (6.39) の右辺第 2 項は $\sum_{i<j}(\boldsymbol{F}_{ij} \cdot (d\boldsymbol{r}_{ij}/dt))$ と表される。従って

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^2\right) = \sum_i \left(\boldsymbol{F}^{(o)} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right) + \sum_{i<j} \left(\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt}\right) \tag{6.41}$$

これを、$t = t_0 \sim t$ まで積分すると

$$\begin{aligned}&\sum_i \frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v}_{i0}^2 = \sum_i \int_{t_0}^{t} \left(\boldsymbol{F}^{(o)} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right) dt \\ &+ \sum_{i<j} \int_{t_0}^{t} \left(\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt}\right) dt\end{aligned} \tag{6.42}$$

そこで

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v}_i^2 \qquad \text{: 全運動エネルギー} \quad , \\
W_i^{(o)}(t;t_0) &= \int_{t_0}^{t} \left(\boldsymbol{F}^{(o)} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \right) dt \quad , \\
W_{ij}(t;t_0) &= \int_{t_0}^{t} \left(\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt} \right) dt
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

として

$$
T(t) - T(t_0) = \sum_i W_i^{(o)}(t;t_0) + \sum_{i<j} W_{ij}(t;t_0) \tag{6.44}
$$

まず、内力 $\boldsymbol{F}_{ij}$ が相対ベクトル $\boldsymbol{r}_{ij}$ だけの函数で、かつ保存力であるとすると、任意の閉じた経路に対して $\oint(\boldsymbol{F}_{ij} \cdot d\boldsymbol{r}_{ij}) = 0$ が満され、$\boldsymbol{F}_{ij}$ はポテンシャル $U(\boldsymbol{r}_{ij})$ の偏微分 (にマイナス符号をつけたもの) で表される。つまり

$$
\boldsymbol{F}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_{ij}} U(\boldsymbol{r}_{ij}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} U(\boldsymbol{r}_{ij}) \tag{6.45}
$$

ここに、$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji}$ より、$U(\boldsymbol{r}_{ij}) = U(\boldsymbol{r}_{ji})$ である。i を固定して $j \neq i$ で和をとると

$$
\sum_{j\ (\neq i)} \boldsymbol{F}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} \sum_{j\ (\neq i)} U(\boldsymbol{r}_{ij}) \tag{6.46}
$$

そこで

$$
U^{(\mathrm{in})}(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = \sum_{i<j} U(\boldsymbol{r}_{ij}) \qquad \text{: 内力の全ポテンシャル} \tag{6.47}
$$

とすると

$$
\sum_{j\ (\neq i)} \boldsymbol{F}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} U^{(\mathrm{in})}(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \tag{6.48}
$$

であることが示せる。実際

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} \sum_{k<j} U(\boldsymbol{r}_{kj}) &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} \sum_k \sum_{j\ (k<j)} U(\boldsymbol{r}_{kj}) \\
&= \sum_{j\ (i<j)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} U(\boldsymbol{r}_{ij}) + \sum_{k\ (k<i)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} U(\boldsymbol{r}_{ki}) \\
&= \sum_{j\ (i<j)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} U(\boldsymbol{r}_{ij}) + \sum_{j\ (j<i)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} U(\boldsymbol{r}_{ij}) \\
&= \sum_{j\ (\neq i)} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} U(\boldsymbol{r}_{ij})
\end{aligned}
\tag{6.49}
$$

ここで、2 行目の 2 項目で $U(\boldsymbol{r}_{ki}) = U(\boldsymbol{r}_{ik})$ を用い、そのあと $k \to j$ とした。

更に、もし内力が中心力 [1]であるとすると、$\boldsymbol{F}_{ij} \parallel \boldsymbol{r}_{ij}$ より

$$\boldsymbol{F}_{ij} = f(r_{ij})\,\widehat{\boldsymbol{r}}_{ij} = f(r_{ij})\,\frac{\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}} \tag{6.50}$$

と書ける。ここに、$r_{ij} = |\boldsymbol{r}_{ij}|$ は質点 i と質点 j の間の距離、$\widehat{\boldsymbol{r}}_{ij} = (\boldsymbol{r}_{ij}/r_{ij})$ は質点 j から質点 i に至る変位ベクトルの方向 (単位ベクトル) を表す。 そこで

$$U(\boldsymbol{r}_{ij}) = -\int (\boldsymbol{F}_{ij} \cdot d\boldsymbol{r}_{ij}) = -\int f(r_{ij})\frac{1}{r_{ij}}\,(\boldsymbol{r}_{ij} \cdot d\boldsymbol{r}_{ij}) \tag{6.51}$$

ここに、$(1/r)(\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}) = dr$ ($\boldsymbol{r}^2 = r^2$ を微分せよ) より

$$U(\boldsymbol{r}_{ij}) = -\int_{(r_{ij})_0}^{r_{ij}} f(r_{ij})\,d\,r_{ij} \tag{6.52}$$

エネルギーの原点を $U(r_{ij} = \infty) = 0$ と選ぶと

$$U(\boldsymbol{r}_{ij}) = -\int_{\infty}^{r_{ij}} f(r_{ij})\,d\,r_{ij} = \int_{r_{ij}}^{\infty} f(r_{ij})\,d\,r_{ij} \tag{6.53}$$

この時、$U(\boldsymbol{r}_{ij})$ は $r_{ij} = |\boldsymbol{r}_{ij}|$ だけの函数である。特に、万有引力の時は $f(r) = -Gm_1m_2/r^2$ より

$$U(r) = \int_r^{\infty} f(r)\,d\,r = -Gm_1m_2\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = -G\frac{m_1m_2}{r} \tag{6.54}$$

これを、万有引力ポテンシャルという。

一般の保存力の場合に戻って、Eq. (6.43) の $W_{ij}(t;t_0)$ は

$$\begin{aligned}
W_{ij}(t;t_0) &= \int_{t_0}^{t}\left(\boldsymbol{F}_{ij}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt}\right)d\,t = \int_{t_0}^{t}\left(-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}_{ij}}U(\boldsymbol{r}_{ij})\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_{ij}}{dt}\,d\,t\\
&= U(\boldsymbol{r}_{ij}(t_0)) - U(\boldsymbol{r}_{ij}(t)) \quad ,\\
\sum_{i<j} W_{ij}(t;t_0) &= \sum_{i<j} U(\boldsymbol{r}_{ij}(t_0)) - \sum_{i<j} U(\boldsymbol{r}_{ij}(t))\\
&= U^{(\mathrm{in})}(t_0) - U^{(\mathrm{in})}(t)
\end{aligned} \tag{6.55}$$

ここに

$$U^{(\mathrm{in})}(t) = \sum_{i<j} U(\boldsymbol{r}_{ij}(t)) \tag{6.56}$$

[1]中心力の正確な定義：質点の間に働く力が両質点を結ぶ方向を向き、その大きさが質点間の距離だけで決まる場合、この力を中心力という。

を内部位置エネルギーという。これを使うと Eq. (6.44) は

$$[T(t)+U^{(\mathrm{in})}(t)]-[T(t_0)+U^{(\mathrm{in})}(t_0)]=\sum_i W_i^{(o)}(t;t_0) \tag{6.57}$$

となる。更に、外力も保存力なら、外力 $\boldsymbol{F}_i^{(o)}$ のポテンシャルを $U_i^{(o)}(\boldsymbol{r}_i)$、全系の外力による位置エネルギーを

$$U^{(o)}(t)=\sum_i U_i^{(o)}(\boldsymbol{r}_i(t)) \tag{6.58}$$

として

$$\sum_i W_i^{(0)}(t;t_0)=U^{(o)}(t_0)-U^{(o)}(t) \tag{6.59}$$

より

$$T(t)+U^{(\mathrm{in})}(t)+U^{(o)}(t)=T(t_0)+U^{(\mathrm{in})}(t_0)+U^{(o)}(t_0)=E=\text{一定} \tag{6.60}$$

これを、質点系の全力学的エネルギーという。まとめると、「内力も外力も保存力の時、質点系の全力学的エネルギーは保存する。」$U=U^{(\mathrm{in})}+U^{(o)}$ を質点系の位置エネルギー (ポテンシャルエネルギー) という。また

$$\begin{aligned}-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} &= -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i}\sum_j U_j^{(o)}(\boldsymbol{r}_j)-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i}\sum_{k<j}U(\boldsymbol{r}_{kj}) \\ &= \boldsymbol{F}_i^{(o)}+\sum_{j\ (\neq i)}\boldsymbol{F}_{ij}\end{aligned} \tag{6.61}$$

より、質点系の運動方程式は

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} \qquad (i=1,\cdots,\ N) \tag{6.62}$$

とも書ける。

(重心運動の分離)　(内力、外力とも保存力とする。)

$M=\sum_{i=1}^N m_i$, $\boldsymbol{r}_G=(1/M)\sum_{i=1}^N m_i\boldsymbol{r}_i$ として、$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}'_i+\boldsymbol{r}_G$ $(i=1,\cdots,\ N)$ とすると、$\sum_i m_i\boldsymbol{r}'_i=0$ より

$$\begin{aligned}T &= \sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right)^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\right)^2 \\ &= \sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt}\right)^2+\sum_i m_i\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}+\sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\right)^2 \\ &= \sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}M\left(\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\right)^2=T^{(\mathrm{in})}+T_G\end{aligned} \tag{6.63}$$

ここに

$$\begin{aligned} T_G &= \frac{1}{2}M\left(\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\right)^2 \qquad &: \text{重心運動の運動エネルギー} \\ T^{(\mathrm{in})} &= \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\frac{d\boldsymbol{r}'_i}{dt}\right)^2 \qquad &: \text{内部運動の運動エネルギー} \end{aligned} \tag{6.64}$$

質点系の全エネルギーは

$$E = \left(T^{(\mathrm{in})} + U^{(\mathrm{in})}\right) + T_G + U^{(o)} \tag{6.65}$$

ここに

$$E^{(\mathrm{in})} = T^{(\mathrm{in})} + U^{(\mathrm{in})} \qquad : \text{質点系の内部エネルギー} \tag{6.66}$$

は、$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}'_i - \boldsymbol{r}'_j$ より、重心に対する相対座標とその速度のみで表されている。特に、孤立系では $U^{(o)} = 0$ より、重心運動の運動方程式は

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = 0 \tag{6.67}$$

そこで、1 質点の場合と同様 $T_G =$ 一定。これと全エネルギーの保存則とあわせて

$$E^{(\mathrm{in})} = T^{(\mathrm{in})} + U^{(\mathrm{in})} = \text{一定} \tag{6.68}$$

すなわち、「孤立系では内部エネルギーが保存する。」

特に、2 質点系では

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \quad , \qquad \boldsymbol{r}_G = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{6.69}$$

により、相対座標と重心座標への変換を行うと、$T^{(\mathrm{in})}$ は Eq. (6.17) の相対運動の運動エネルギー T' である。