第 12 講　(平成 19 年 7 月 3 日, 10 日)

7 中心力による運動

7.1 2 質点系の運動

質点系の運動の特別な場合として、中心力の内力だけが働く 2 質点系の運動を考えると、2 体系の運動方程式は一定速度の運動を続ける重心系の運動と 2 質点の相対運動に対する 1 体問題に帰着される。そこでは、2 質点の位置ベクトルの重心、相対変換が基本的である。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \ , \qquad \boldsymbol{r}_G = \frac{1}{M}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2) \ ,$$
$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{M}(m_2\boldsymbol{p}_1 - m_1\boldsymbol{p}_2) = \mu\boldsymbol{v} \ , \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \tag{7.1}$$

ここに、$M = m_1 + m_2$ は全質量、$\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ は換算質量である。運動方程式 Eq. (6.33) は

$$\mu\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \ , \qquad M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = 0 \tag{7.2}$$

となり、外力が働かないから $\boldsymbol{P} =$ 一定、となる。角運動量保存則は

$$\boldsymbol{M}' = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}] = \text{一定} \ , \qquad \boldsymbol{M}_G = [\boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{P}] = \text{一定} \tag{7.3}$$

であり、相対運動は一定平面のみで起こる。もし、内力が保存力なら、重心系でのエネルギー E は、重心運動のエネルギーとともに保存され

$$E = \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{v}^2 + U(r) \ , \qquad T_G = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_G^2 = \text{一定} \tag{7.4}$$

となる。ここに、$\boldsymbol{F} = -(\partial/\partial\boldsymbol{r})U(r)$、かつ $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{r}$ である。

以下、相対運動だけに注目して、これを 2 次元の極座標表示で解く。まず、内部角運動量は、$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{r}_\theta$ として

$$\boldsymbol{M}' = \mu[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}] = \mu r^2\dot{\theta}[\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta] = \mu r^2\dot{\theta}\boldsymbol{e}_z \tag{7.5}$$

ここに、$\boldsymbol{e}_z = [\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta]$ は z-軸方向への単位ベクトルである。ここから

$$h = |\boldsymbol{M}'| = \mu r^2\dot{\theta} = \text{一定} \tag{7.6}$$

中心力を $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r$ とすると、Eq. (7.2) の相対運動の方程式は

$$\mu[\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2] = f(r) \ , \qquad \mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \tag{7.7}$$

と表わされる。2 番目の式は、Eq. (7.6) の角運動量保存則と同等であり、また次の面積速度が一定という表現と同値である。

$$S = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2\mu} = \text{一定} \tag{7.8}$$

Eq. (7.6) から得られる $\dot{\theta} = h/(\mu r^2)$ を Eq. (7.7) の動径方向の方程式に代入すると

$$\ddot{r} = \frac{h^2}{\mu^2 r^3} + \frac{1}{\mu} f(r) \quad , \qquad \dot{\theta} = \frac{h}{\mu r^2} \tag{7.9}$$

ここで、$h^2/\mu r^3$ は角度方向の運動による遠心力の効果を表わす。適当な境界条件のもとに、これらの微分方程式を解けば解が求まる。具体的には、まず 1 番目の式から r が t の函数として求まり ($r = r(t)$)、次にそれを 2 番目の式に代入してまた別の微分方程式を解いて $\theta = \theta(t)$ が求まる。ここで、t を消去すれば r が θ の函数として決まり、軌道が求まることになる。ここで、角運動量の大きさ h は初期条件から決まる定数である。

もし、軌道だけを求めるのであれば、Eq. (7.9) から時間微分を消去して

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{\mu}{h^2} \frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right) = 0 \tag{7.10}$$

という式を導くことが出来る。ここに、$u = 1/r$ である。万有引力 $f(r) = -G m_1 m_2 / r^2$ の時、これを解くと運動の軌跡は楕円軌道 (一般には 2 次曲線) となることが分かる。(植松、「力学」pp. 104 - 105 参照)

7.2 エネルギー保存則の利用 (中心力の場合の形式解)

力が保存力の時、中心力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(r)\boldsymbol{e}_r$ のポテンシャルは

$$U(r) = \int_r^\infty f(r)\, dr \tag{7.11}$$

で与えられるから

$$\begin{aligned} T + U &= \frac{1}{2}\mu \left(v_r^2 + v_\theta^2\right) + U(r) \\ &= \frac{1}{2}\mu \left[(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2\right] + U(r) = E \qquad (\text{一定}) \end{aligned} \tag{7.12}$$

これを

$$\begin{aligned} & E = \frac{\mu}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U^{\mathrm{eff}}(r) \quad , \\ & \text{with} \qquad U^{\mathrm{eff}}(r) = U(r) + \frac{\mu}{2}(r\dot{\theta})^2 = U(r) + \frac{h^2}{2\mu r^2} \end{aligned} \tag{7.13}$$

と書いて、$U^{\mathrm{eff}}(r)$ を動径部分の「有効ポテンシャル」という。もとの $U(r)$ 以外に、遠心力ポテンシャル $h^2/2\mu r^2$ がつけ加わっている。$(-(d/dr)(h^2/2\mu r^2) = h^2/(\mu r^3)$ に注

意) 適当なポテンシャル $U(r)$ に対して、r の函数として $U^{\mathrm{eff}}(r)$ のグラフを描くと、一般には r の小さい領域で遠心力の斥力が勝ち、r は転回点 r_0 より大きいところでのみ運動が可能であることが分かる。Eq. (7.13) から

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - U^{\mathrm{eff}}(r)\right]} \tag{7.14}$$

より、r_0 は $E = U^{\mathrm{eff}}(r_0)$ を満す (一般には、一番小さな) r である。r_0 はパラメータ E と h の函数である。まず、Eq. (7.14) を t で積分すると

$$t - t_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - U^{\mathrm{eff}}(r)\right]}} \tag{7.15}$$

より、r が t の函数として求まる。$(r = r(t))$ 次に、$d\theta/dt = h/(\mu r^2)$ を積分して

$$\theta - \theta_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{h}{\mu\left[r(t)\right]^2}\, dt \tag{7.16}$$

により、θ が t の函数として求まる。もし、軌道だけ必要なら、$d\theta/dr = (d\theta/dt)/(dr/dt)$ を積分して

$$\theta - \theta_0 = \pm\int_{r_0}^{r} \frac{\frac{h}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left[E - U(r) - \frac{h^2}{2\mu r^2}\right]}}\, dr \tag{7.17}$$

これらは、保存力、かつ中心力で相互作用する 2 質点系の相対運動の解を、形式的にではあるが、完全に与えている。

7.3 ケプラー問題 (太陽の引力のもとでの惑星の運動)

幾つかの特別な場合には、前節の積分は解析的に求まる。それは、ポテンシャルが万有引力ポテンシャルである場合と調和振動子 $U(r) = (1/2)kr^2$ の場合である。ここでは、前者について解を具体的に求め、ケプラーの 3 法則を導く。簡単のため $\alpha = Gm_1m_2$ とおいて、万有引力ポテンシャルを $U(r) = -\alpha/r$ と書く。有効ポテンシャルは

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{h^2}{2\mu r^2} \tag{7.18}$$

で与えられる。r で微分して、有効ポテンシャルの極小点を求めると

$$d = \frac{h^2}{\mu\alpha} = \frac{h^2}{Gm_1m_2\mu} \tag{7.19}$$

が得られる。この点における有効ポテンシャルの極小値は

$$U_{\min} = -\frac{\mu\alpha^2}{2h^2} = -\frac{(Gm_1m_2)^2\mu}{2h^2} \tag{7.20}$$

である。運動可能領域が存在するためには

$$E \geq U_{\min} \tag{7.21}$$

でなければならない。軌道の方程式を求めるために、最近接距離 (近日点) を r_0 として、$r = r_0$ の時 $\theta = 0$ になる様に θ の原点を定めると、Eq. (7.17) は

$$\theta = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{h\, dr}{r^2 \sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{h^2}{r^2}}} \tag{7.22}$$

となる。$(1/r) = u$ として u の積分へ移ると

$$\theta = \mp \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{h^2} + \frac{2\mu\alpha}{h^2} u - u^2}} \tag{7.23}$$

ここに、ルート記号の中は、Eq. (7.19) を用いて $(1/d)$ で u の完全平方の形に書ける。更に

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mu E}{h^2} d^2} = \sqrt{1 + \frac{2h^2 E}{\mu\alpha^2}} = \sqrt{1 - \frac{E}{U_{\min}}} \qquad (\geq 0 \quad \text{の実数}) \tag{7.24}$$

と定義すると

$$\theta = \mp \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{d^2} - \left(u - \frac{1}{d}\right)^2}} \tag{7.25}$$

この積分は、積分変数変換 $u - 1/d = (\varepsilon/d)\cos\theta$ により、trivial となる。すなわち、$u = (1 + \varepsilon\cos\theta)/d = 1/r$ より、結局

$$r = \frac{d}{1 + \varepsilon\cos\theta} \tag{7.26}$$

この軌跡は

$$\begin{aligned} &0 \leq \varepsilon < 1 \qquad \text{の時、楕円} \qquad (\varepsilon = 0 \quad \text{の時は円}) \\ &\varepsilon = 1 \qquad \text{の時、放物線} \\ &\varepsilon \geq 1 \qquad \text{の時、双曲線} \end{aligned} \tag{7.27}$$

を表わす。

Eq. (7.27) の楕円の場合がケプラーの第 1 法則である。この時、$\varepsilon < 1$ の条件から $U_{\min} \leq E < 0$ とエネルギー E が負の場合である事が分かる。また

$$\begin{aligned} &\theta = 0 \quad \text{の時} \quad r_0 = \frac{d}{1+\varepsilon} \quad \text{近日点} \\ &\theta = \pi \quad \text{の時} \quad r_0' = \frac{d}{1-\varepsilon} \quad \text{遠日点} \end{aligned} \tag{7.28}$$

また、楕円の半長径は $a=(r_0+r_0')/2=d/(1-\varepsilon^2)$. 楕円の中心から焦点までの距離は $a-r_0=\varepsilon a$ である事が分かる。すなわち、ε は楕円の離心率である。楕円の半短径は $b=\sqrt{a^2-(\varepsilon a)^2}=d/\sqrt{1-\varepsilon^2}=\sqrt{ad}$ となる。a と b^2 をもとの変数で書けば

$$a=-\frac{\alpha}{2E}=-\frac{Gm_1m_2}{2E} \quad , \qquad b^2=-\frac{h^2}{2\mu E} \tag{7.29}$$

すなわち、楕円の半長径は角運動量 h にはよらず、エネルギー E だけによる。ケプラーの第 2 法則は「面積速度一定」であり、それは角運動量一定に他ならない。(中心力の性質)

$$S=\frac{h}{2\mu}=\text{一定} \qquad \text{(角運動量保存則)} \tag{7.30}$$

ケプラーの第 3 法則を導くには、楕円の周期を T として、面積速度一定から $ST=\pi ab$ である事を用いる。ここから

$$T=\frac{\pi ab}{S}=\frac{2\pi\mu}{h}\sqrt{d}a^{\frac{3}{2}}=\frac{2\pi}{G(m_1+m_2)}a^{\frac{3}{2}} \tag{7.31}$$

が得られる。今、太陽の質量が惑星の質量に比べて十分大きいことに注目して $m_1 \gg m_2$ と近似すると

$$T^2=\frac{(2\pi)^2}{Gm_1}a^3 \tag{7.32}$$

となって、”公転周期の 2 乗と軌道の半長径の 3 乗の比は惑星によらず一定” という「ケプラーの第 3 法則」が得られる。

(参考) 2 次曲線の一般論

2 次曲線は、原点にとった 1 つの焦点と或る基準線との間の距離の比が $\varepsilon:1$ となる様な点全体の集合として特徴づけられる。今、基準線として、直交座標表示での $x=d/\varepsilon$ を選ぶとこの条件は Eq. (7.26) で表わされる。これを、直交座標表示すれば $(x=r\cos\theta,\, y=r\sin\theta)$、$0<\varepsilon<1$ の時

$$\left(\frac{x+\frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}}{\frac{d}{1-\varepsilon^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{d}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}\right)^2=1 \tag{7.33}$$

となって楕円を表わすことが分かる。ここから、$a=d/(1-\varepsilon^2)$ かつ $b=d/\sqrt{1-\varepsilon^2}$, $b=\sqrt{1-\varepsilon^2}a$ が導かれる。また、Eq. (7.33) から、楕円の中心は $x=-\varepsilon d/(1-\varepsilon^2)$ の直線上にあり、楕円はこの軸について左右対称である事が分かる。この事は、$x<0$ の領域にも楕円の焦点と基準線が存在することを意味し、これらについても $\varepsilon:1$ の比が成り立つ。ここから、二つの焦点から楕円上の 1 点を結んだ距離の和は $2a$ で一定であるという、楕円のよく知られた性質が簡単に導かれる。一方、$\varepsilon=1$ の時は、Eq. (7.26)

で表わされる曲線は放物線となり、直交表示では $2dx + y^2 = d^2$ で表わされる。更に、$\varepsilon > 1$ の時は、Eq. (7.26) は双曲線

$$\left(\frac{x - \frac{\varepsilon d}{\varepsilon^2 - 1}}{\frac{d}{\varepsilon^2 - 1}} \right)^2 - \left(\frac{y}{\frac{d}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}} \right)^2 = 1 \tag{7.34}$$

となる。今度は、対称軸は $x = \varepsilon d/(\varepsilon^2 - 1)$ であり平面の右側に再び同じ構造が現れる。双曲線では二つの焦点からの距離の差が $2a$ となる。

(H19.7.2 終了)