3　速度ベクトル・加速度ベクトル

(一次元運動)

平均の速度 $\bar{v} = [x(t+\Delta x) - x(t)]/\Delta x = \Delta x/\Delta t$ で $\Delta t \to 0$ の極限をとる。

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta x) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \tag{3.1}$$

(時間に関する微分を、特にドットで表す: ニュートンの微分記号) $x(t)$ を 2 次元の t-x グラフで表すと、速度はその時刻 t における接線の傾きである。

(三次元運動) ベクトルは、その各成分を微分する。時間はスカラー量 (座標系の回転に対して不変) であるから、速度はベクトルである。加速度も同様にベクトル。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{d}{dt}(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z) = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{3.2}$$

ここに、$\mathcal{K} = (\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ は絶対静止座標系 ($\dot{\boldsymbol{e}}_x = 0$, $\dot{\boldsymbol{e}}_y = 0$, $\dot{\boldsymbol{e}}_z = 0$) であると仮定する。(その様な特殊な座標系が存在するかどうかは分からないが、少なくとも、地上表面の物体の巨視的運動を局所的に観測する限り、大地に結び付いた座標系は近似的に絶対静止座標系であることが観測される。) 速度ベクトルは、$\Delta\boldsymbol{r}$ の方向を向くから、$\Delta t \to 0$ の極限で、質点の軌跡に沿った接線の方向を向く。

加速度は、速度を更にもう一度時間微分する。

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{3.3}$$

(逆演算) 積分

$\boldsymbol{v}(t) = d\boldsymbol{r}(t)/dt$ を積分して

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\boldsymbol{r}(t)}{dt}dt = \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}_1} d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 \tag{3.4}$$

ここに $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t_0)$. $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$. (最後の積分の表記方は注意を要する。ここでは、それぞれ x, y, z 成分の式をまとめて書いただけであって、3 重積分とか体積積分の意味ではない !)

(注意) 物理では、$t < t_0$ からの微分と $t > t_0$ からの微分が一致しないことはよくある。例えば、加速度が t の関数として不連続な場合がそのような場合である。

(ベクトルの極座標表示) (2 次元)

座標変換 $\mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ で、$\mathcal{K}' = (O'; \boldsymbol{e}_x{}', \boldsymbol{e}_y{}')$ を質点に結び付いた座標系 (一般に重心系という) にとり、質点をその座標原点におく。その様な座標系は一般には無数にあるが、以下では、特別な場合として二つの場合を考察する。

質点が新しい座標系の原点にあるから、質点の運動を論じることは座標系間の相対運動を議論することに帰着する。第 3 講の座標変換の公式により、並進変換については $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a}$ である。今、 $\boldsymbol{r}' = 0$ であるから、質点の位置をもとの座標系 $\mathcal{K}$ で極座標表示しておくと便利である。$\boldsymbol{e}_x{}'$ を動径方向の単位ベクトルに選んで、それを $\boldsymbol{e}_r$ と書くと、$\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r$ であるから、$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r$ と表される。位置ベクトルの x-y 成分の極座標表示を用いると

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = r\boldsymbol{e}_r \to \boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

と表される。次に、$\boldsymbol{e}_x{}'$ に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{e}_y{}'$ は、偏角 θ の増大する方向を向く。これを、$\boldsymbol{e}_\theta$ と書くと、これは具体的には上の $\boldsymbol{e}_r$ の表式で θ を $\theta + \pi/2$ と変えることによって得られる。つまり

$$\boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

速度と加速度は、Eq. (3.5) の $\boldsymbol{r}$ を時間微分して得られるが、その際、$\boldsymbol{e}_r$ がもはや絶対静止座標系ではないことに注意する必要がある。合成関数の微分法より

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \quad , \qquad \dot{\boldsymbol{e}}_\theta = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r \tag{3.7}$$

だから

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta \tag{3.8}$$

を得る。これを、$\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ と書いて、v_r, v_θ をそれぞれ、速度の動径 (方向の) 成分、角度 (方向の) 成分という。これらは、Eq. (3.8) から

$$v_r = \dot{r} \quad , \qquad v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega \tag{3.9}$$

で与えられる。また、$\omega = \dot{\theta}$ を角速度という。同様に、もう一度時間で微分して、加速度の極座標成分を求めると $\boldsymbol{a} = a_r\boldsymbol{e}_r + a_\theta\boldsymbol{e}_\theta$ として

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 \quad (= \ddot{r} - r\omega^2) \\ a_\theta &= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad \left(= 2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}r^2\omega\right)\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

が得られる。($(1/2)r^2\omega$ は、いわゆる面積速度である。)

(内積の微分) 普通の積の微分公式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right) \tag{3.11}$$

これを使うと、$v=|\boldsymbol{v}|$=一定、の時

$$\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}) = 0 \to \boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{a} \tag{3.12}$$

すなわち、速さ=一定、の時、速度ベクトルと加速度ベクトルは直交する。(例) 等速円運動：$\dot{r}=0$, r=一定, ω=一定, $a_r=-r\omega^2$, $a_\theta=0$、(注意：速さ=一定 → 等速円運動、というのではない! $v^2=\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2$ であるから、$v=$ 一定、でも $\dot{r}=0$ とは限らない。)

また、単位ベクトルを微分すると、そのベクトルはもとのベクトルに直交する。Eq. (3.7) は、そのような例である。

(3 次元極座標表示) → 自習

3 次元極座標についても、同様な取り扱いが可能である。練習問題として、$\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ を具体的に求め、それらを時間で微分することによって速度、加速度の 3 次元極座標成分を求めよ。(ヒント： $\boldsymbol{e}_\varphi=[\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_\theta]$ であり、この単位ベクトルは x-y 平面の方向を向く。) 間違えない様にして根気良く計算を続けると、以下の結果が得られる。

$$\begin{aligned}
v_r &= \dot{r} \ , \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \ , \qquad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi} \ , \\
a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 - r\left(\sin\theta\dot{\varphi}\right)^2 \\
a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\left(\dot{\varphi}\right)^2 \\
a_\varphi &= \left(\frac{1}{r\sin\theta}\right)\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(植松「力学」第 2 章、演習問題 10 参照)

(注意) Eq. (3.9) と Eq. (3.13) の速度成分は、簡単な幾何学的考察によっても得られる。

(もう少し自然な座標)

もう少し自然な座標系として $\mathcal{K}'$ の $\boldsymbol{e}_x{}'$ を軌跡の接線方向、$\boldsymbol{e}_y{}'$ を法線方向にとることができる。そのためには、運動の軌跡に沿って起点 O'' から距離を測って、それを $s(t)$ とする。(これは、スカラー量である。) ベクトル $\boldsymbol{r}$ を s の函数として表す。

$$\boldsymbol{r}(s(t)) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

この様な s を媒介変数と呼んでいる。(以下では、$s(t)$, $\boldsymbol{r}(s)$ 等は全て" 滑らか"(微分可能) な函数であり、特異点はないと仮定する。) 速度ベクトルは合成函数の微分法を用いて計算される。

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(s(t)) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}\frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{e}_t \tag{3.15}$$

ここで、$(ds/dt) = v$ は速度の大きさ (速さ) であり、$(d\boldsymbol{r}(s)/ds) = \boldsymbol{e}_t$ が単位ベクトルである事は次のようにしてわかる。まず、微少時間 Δt の間に動いた距離は $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ であるので、これを Δt で割って $\Delta \to 0$ へ移ると

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2} \\ &= \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = v \end{aligned} \tag{3.16}$$

また、

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta s} \\ \frac{\Delta y}{\Delta s} \\ \frac{\Delta z}{\Delta s} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

より、常に

$$\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)^2} = \frac{1}{\Delta s}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = 1 \tag{3.18}$$

より

$$|\boldsymbol{e}_t| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = 1 \tag{3.19}$$

次に、単位ベクトル $\boldsymbol{e}_t$ をもう一度 s で微分すると、法線ベクトル (法線方向の単位ベクトル) $\boldsymbol{e}_n$ に比例するはずである。これを

$$\frac{d}{ds}\boldsymbol{e}_t = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_n \quad , \qquad \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d\boldsymbol{e}_t}{ds}\right| \tag{3.20}$$

と書いて、$1/\rho$ を曲率、ρ を曲率半径という。また、$\boldsymbol{e}_t$ と $\boldsymbol{e}_n$ から決る平面を接触平面という。その平面の新しい法線方向の単位ベクトルは、外積を使って $\boldsymbol{e}_b = [\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n]$ で与えられる。三つのベクトル、$\boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_b$ をそれぞれ、接線ベクトル (tangent vector)、主法線ベクトル (pricipal normal vector)、陪法線ベクトル (binormal vector) という。

接触平面の意味は、" 運動が局所的には接触平面内でおこる "ことである。これは次のようにしてわかる。まず、微少時間 Δt の間におこる位置ベクトルの変位は、Taylor 展開を使うと

$$\Delta \boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{r}}\Delta t + \ddot{\boldsymbol{r}}\frac{1}{2}(\Delta t)^2 + O\left((\Delta t)^3\right) = \boldsymbol{v}\Delta t + \boldsymbol{a}\frac{1}{2}(\Delta t)^2 + O\left((\Delta t)^3\right) \tag{3.21}$$

と表される。ここに、$O\left((\Delta t)^3\right)$ は order $(\Delta t)^3$ の微少量をあらわす記号である。同様に、$\boldsymbol{r}$ を s の函数と考えると

$$\Delta\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\Delta s + \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\frac{1}{2}(\Delta s)^2 + O\left((\Delta s)^3\right) = \boldsymbol{e}_t\Delta t + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_n\frac{1}{2}(\Delta s)^2 + O\left((\Delta s)^3\right) \quad (3.22)$$

と表される。ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}$ のさす終点から接触平面までの距離は、$\Delta\boldsymbol{r}$ と陪法線ベクトル $\boldsymbol{e}_b$ の内積で表されるから (すなわち、$|\Delta\boldsymbol{r}|\cos\theta_b$, ここに θ_b は $\Delta\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{e}_b$ との間の角)、これを Eq. (3.22) と $\boldsymbol{e}_b = [\boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n]$ を用いて計算すると

$$\begin{aligned}(\Delta\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_b) &= \boldsymbol{e}_t\cdot[\boldsymbol{e}_t\times\boldsymbol{e}_n](\Delta t) + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_n\cdot[\boldsymbol{e}_t\times\boldsymbol{e}_n]\frac{1}{2}(\Delta s)^2 + O\left((\Delta s)^3\right) \\ &= O\left((\Delta s)^3\right) \qquad (3.23)\end{aligned}$$

すなわち、微少時間後の質点の位置 $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ は $(\Delta s)^2$ までの精度で依然、接触平面内にあることがわかる。

曲率半径の意味は、この座標系で加速度を計算してみると明らかになる。すなわち、$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t$ を t で微分して、

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}\boldsymbol{e}_t + v\dot{\boldsymbol{e}}_t \qquad (3.24)$$

ここに、

$$\dot{\boldsymbol{e}}_t = \frac{d}{dt}\boldsymbol{e}_t = \frac{d\boldsymbol{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_n v = \frac{v}{\rho}\boldsymbol{e}_n \qquad (3.25)$$

より

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \qquad (3.26)$$

これを、$\boldsymbol{a} = a_t\boldsymbol{e}_t + a_n\boldsymbol{e}_n$ と書くと

$$\begin{aligned} a_t &= \dot{v} && \text{接線方向の加速度} \\ a_n &= \frac{v^2}{\rho} && \text{法線方向の加速度} \qquad (3.27)\end{aligned}$$

となる。つまり、ρ は t の瞬時における近似的な円運動の半径である。