第 9 講　(平成 19 年 6 月 12 日)

5.2 保存力と中心力

一般に力 $\boldsymbol{F}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ だけでなく、速度 $\boldsymbol{v}$, 時間 t 等の函数である: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$. 今、$\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{r}$ だけの函数のとき、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を「力の場」という。一般に、空間の各点 P にベクトルが与えられたとき、そのベクトルの総体を「ベクトル場」という。同様に、空間の各点 P にスカラー量が与えられたとき、そのスカラーの総体を「スカラー場」という

ベクトル場 : $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$, $\cdots$ (力の場、電場、磁場、$\cdots$)

スカラー場 : $U(\boldsymbol{r})$, $\phi(\boldsymbol{r})$, $\cdots$ (位置ポテンシャル、電磁場のポテンシャル、$\cdots$)

以下、簡単のため $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を仮定する。

仕事は一般には、運動の起点 O と終点 P 以外にその運動の経路 γ にも依存するため、それを $W_\gamma(P;O)$ と書く。

$$W(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right) dt = \int_\gamma (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}) \equiv W_\gamma(P;O) \tag{5.20}$$

(例)

2 次元の運動で、$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, かつ O が座標原点、$P = (x_1, y_1)$ のとき、O から P まで引いた直線の経路を γ_I, $O \to (x_1, 0) \to (x_1, y_1)$ を γ_{II}, $O \to (0, y_1) \to (x_1, y_1)$ を γ_{III} とすると

$$W_{\gamma_I}(P, O) = x_1 + \frac{1}{2} x_1 y_1 \ , \quad W_{\gamma_{II}}(P, O) = x_1 + x_1 y_1 \ , \quad W_{\gamma_{III}}(P, O) = x_1 \tag{5.21}$$

で全て違う! (植松「力学」 p. 61 参照)

$W_\gamma(P;O)$ が P, O にはよるが、経路 γ にはよらないとき、$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を「保存力」という。この場合、ポテンシャル (位置エネルギー) による記述が可能である。

(力が保存力であるための条件)

線積分 $W_\gamma(P;O) = \int_\gamma (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r})$ に対して、経路を逆に辿った場合の線積分を $W_{-\gamma}(O;P)$ $= \int_{-\gamma} (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r})$ で表す。$W_{-\gamma}(O;P) = -W_\gamma(P;O)$ である。また別の経路 γ' を考えると、$W_\gamma(P;O) = W_{\gamma'}(P;O)$ のとき、$W_\gamma(P;O) = -W_{-\gamma'}(O;P)$. つまり、$W_\gamma(P;O) + W_{-\gamma'}(O;P) = 0$. すなわち、$O$ から P を巡って、再び O に帰ってくる閉じた経路を $C = \gamma \cup (-\gamma')$ とすると $\int_C (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}) = 0$. これは、しばしば $\oint (\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}) = 0$ と書かれる。すなわち、「$\boldsymbol{F}$ が保存力なら、経路を一周するとその力がした仕事はゼロ」である。

また逆に、任意の閉じた経路に対して $\oint(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r})=0$ ならば、$\boldsymbol{F}$ は保存力である。実際、起点 O, 終点 P を巡る 1 周の線積分を考えると、任意の γ, γ' に対して $W_\gamma(P;O)+W_{-\gamma'}(O;P)=0$. つまり $W_\gamma(P;O)=W_{\gamma'}(P;O)$. 従って、$W_\gamma(P;O)$ は γ によらず $W(P;O)$ である。

まとめると

$$\oint(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r})=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{F}\ \text{は保存力} \tag{5.22}$$

一般に $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が保存力なら、起点 O を固定して

$$W(P,O)=-U(P)+\mathrm{const} \tag{5.23}$$

と書ける。ここに、$U(P)$ を位置エネルギー (ポテンシャルエネルギー) という。ここに、$W(O;O)=0$ より、const$=U(O)$ (起点のポテンシャルエネルギー) である。これを使うと、$T(P)-T(O)=W(P;O)$ より

$$T(P)+U(P)=T(O)+U(O)=E \qquad (\text{全エネルギー}) \tag{5.24}$$

これを、「力学的エネルギーの保存則」という。

(力とポテンシャルの関係)

以下、$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ は保存力とする。

$$W(P,O)=-U(P)+\mathrm{const}=-U(\boldsymbol{r})+\mathrm{const} \tag{5.25}$$

と書いて、$\boldsymbol{r}$ についての偏微分を考える。$W(P;O)$ は経路によらないから、x, y, z 方向の微分をそれぞれ独立に考えることが出来る。

$$\frac{W(x+\Delta x,y,z;O)-W(x,y,z;O)}{\Delta x}=-\frac{U(x+\Delta x,y,z)-U(x,y,z)}{\Delta x} \tag{5.26}$$

で

$$\text{左辺}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}(F_x dx+F_y dy+F_z dz)=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}F_x dx \tag{5.27}$$

より、$\Delta x\to 0$ へ移ると

$$F_x=-\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z) \tag{5.28}$$

これを、x の偏微分という。同様に

$$F_y=-\frac{\partial}{\partial y}U(x,y,z)\ \ , \qquad F_z=-\frac{\partial}{\partial z}U(x,y,z) \tag{5.29}$$

これらをまとめて

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}\, U = -\mathrm{grad}\, U \tag{5.30}$$

と書く。ここに

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathrm{grad} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{5.31}$$

(gradient の幾何学的意味)

Taylor 展開より

$$\Delta U(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \Delta \boldsymbol{r} \right) + O((\Delta \boldsymbol{r})^2) \tag{5.32}$$

点 $P = (\boldsymbol{r}) = (x, y, z)$ での等ポテンシャル面の接平面の方程式は

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) (X - x) + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) (Y - y) + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) (Z - z) = 0 \tag{5.33}$$

である。従って、$(\partial U / \partial \boldsymbol{r})$ は接平面の法線方向を向く。そこで、法線の単位ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_n = \frac{\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}}{\left| \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \right|} \tag{5.34}$$

とすると

$$\Delta U(\boldsymbol{r}) = \left| \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \right| (\boldsymbol{e}_n \cdot \Delta \boldsymbol{r}) + O((\Delta \boldsymbol{r})^2) \tag{5.35}$$

ここで、$\Delta \boldsymbol{r} = n \boldsymbol{e}_n$ とおくと

$$\Delta U(\boldsymbol{r}) = \left| \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \right| n + O(n^2) \tag{5.36}$$

つまり

$$\lim_{n \to 0} \frac{\Delta U(\boldsymbol{r})}{n} = \left| \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \right| \tag{5.37}$$

(力の絶対値は法線方向の勾配である。) $\Delta U(\boldsymbol{r})$ が一定の場合を考えると、「等ポテンシャル面が密なところほど、保存力 $\boldsymbol{F}$ の大きさが大きい」ことがわかる。

(中心力)

万有引力の様に、ポテンシャルエネルギー $U(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ の大きさ $r = |\boldsymbol{r}|$ だけの函数のとき、そこから導かれる保存力を「中心力」という。このとき

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} U(r) = -\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial}{\partial r} U(r) = -\boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} U(r) \tag{5.38}$$

は $\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{e}_r$ であり、力は中心方向を向く。一般に、$\boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{e}_r$ (動径方向) を向く保存力 $\boldsymbol{F}$ を中心力といい、そのポテンシャルエネルギーは $r = |\boldsymbol{r}|$ だけの函数となる。

参考

(偏微分、全微分) (2 変数で説明する)

2 変数の連続函数 $f(x, y)$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{h} &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \\ \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{h} &= \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \end{aligned} \tag{5.39}$$

が存在するとき、$(\partial/\partial x) f(x, y)$, $(\partial/\partial y) f(x, y)$ をそれぞれ x の偏微分、y の偏微分という。($f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ とも書く。) このとき、Taylor 展開から

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y) - f(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) \Delta x + O((\Delta x)^2) \\ f(x, y + \Delta y) - f(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \Delta y + O((\Delta y)^2) \end{aligned} \tag{5.40}$$

更に

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y + \Delta y) \right) \Delta x + O((\Delta x)^2) \tag{5.41}$$

で Eq. (5.40) の下の式を使うと

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \quad = \quad & \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) \Delta x \\ & + O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2, (\Delta x)(\Delta y)) \end{aligned} \tag{5.42}$$

より、Eq. (5.40) の下の式と加えて

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ & = (f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)) + (f(x, y + \Delta y) - f(x, y)) \\ & = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right) \Delta x + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \Delta y + O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2, (\Delta x)(\Delta y)) \end{aligned} \tag{5.43}$$

このとき、主要部 $\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\Delta x+\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)\Delta y$ を 2 変数函数 $f(x,y)$ の全微分といい $d\,f$ と書く。

$$d\,f=\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)\Delta x+\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)\Delta y \tag{5.44}$$

特に、$f(x,y)=x$ のとき、$(\partial/\partial x)f(x,y)$, $(\partial/\partial y)f(x,y)$ はそれぞれ 1, 0 だから $dx=\Delta x$. 同様に、$dy=\Delta y$. そこで

$$d\,f=\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)dx+\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)dy \tag{5.45}$$

2 階の偏微分は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(x,y)\ ,\quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)\ ,\quad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)\ ,\quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) \tag{5.46}$$

である。もし $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)$ が連続なら、2 重極限の定理により

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y) \tag{5.47}$$

が成り立つ。

(微分形式)

一般に、2 次元平面内で連続な函数 $P=P(x,y)$, $Q=Q(x,y)$ に対して

$$\omega=Pdx+Qdy \tag{5.48}$$

を微分形式 (differential form) という。全微分は、“連続的微分可能”[1] な原始函数 $f(x,y)$ があって、P, Q が

$$P(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\ \ ,\qquad Q(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \tag{5.49}$$

で与えられる場合である。$(\omega=d\,f)$

(1 変数の場合)

$P=P(x)$ (連続) なら、$\omega=P(x)dx$ を積分して

$$f(x)=\int_{x_0}^{x}P(x)\ dx\ \ ,\qquad \frac{df(x)}{dx}=P(x) \tag{5.50}$$

ここに、$P(x)$ は連続より Riemann 積分可能で $f(x)$ は微分可能である。つまり、$\omega=P(x)dx=(df(x)/dx)dx=d\,f$. すなわち、$f(x)$ は原始函数である。

[1](偏) 微分係数が連続な時、連続的微分可能という。

(線積分)

(区分的に) 微分可能な経路

$$\begin{aligned} &\gamma(s) = (x(s), y(s)) \qquad s \in [0, \ell] \\ &\gamma(0) = O \quad , \qquad \gamma(\ell) = P \end{aligned} \tag{5.51}$$

に対して、微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ の線積分を

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_\gamma (Pdx + Qdy) = \int_0^\ell \left(P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} \right) ds \\ &= \int_0^\ell \left\{ P(x(s), y(s))\frac{dx(s)}{ds} + Q(x(s), y(s))\frac{dy(s)}{ds} \right\} ds \\ &= \int_0^\ell f(s) ds \end{aligned} \tag{5.52}$$

で定義する。ここに、$f(s) = P(x(s), y(s))\frac{dx(s)}{ds} + Q(x(s), y(s))\frac{dy(s)}{ds}$ である。s を更に

$$\begin{aligned} &s = s(t) \ (\text{連続的微分可能}) \qquad t \in [t_0, t_1] \\ &s(t_0) = 0 \ , \quad s(t_1) = \ell \ , \quad {}^\forall \dot{s}(t) > 0 \quad (\text{単調増大}) \end{aligned} \tag{5.53}$$

として

$$\int_\gamma \omega = \int_0^\ell f(s) ds = \int_{t_0}^{t_1} f(s(t))\frac{ds(t)}{dt} dt \tag{5.54}$$

は不変である。これを、$t \to \gamma(s(t)) = \gamma_1(t)$ による新しいパラメータへの変換という。

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega \tag{5.55}$$

○ $s(u) = \ell - u$ with $u \in [0, \ell]$ とすると

$$s(0) = \ell \ , \quad s(\ell) = 0 \quad , \qquad \frac{ds(u)}{du} = -1 < 0 \quad (\text{単調減少}) \tag{5.56}$$

として

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= \int_0^\ell f(s(u))\frac{ds(u)}{du} du = \int_\ell^0 f(s) ds \\ &= -\int_0^\ell f(s) ds = -\int_\gamma \omega \end{aligned} \tag{5.57}$$

この時、パラメータの変換により γ の向きが変ったといい、$\gamma_1 = -\gamma$ と書く。

(微分形式の原始函数)

微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$ が連続的微分可能な函数 $f = f(x,y)$ を用いて $\omega = d\,f$ と書ける時、$f(x,y)$ を微分形式 ω の原始函数という。この時

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \qquad (\text{連続}) \tag{5.58}$$

また、平面内の任意の 2 点 (x_0, y_0), (x,y) を結ぶ (区分的に) 微分可能な経路 $\gamma(s)$ に対して

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma d\,f = f(x,y) - f(x_0,y_0) \tag{5.59}$$

(命題) 微分形式 ω が平面内で原始函数をもつ
$\Longleftrightarrow$ 平面内の任意の閉じた経路 C に対して $\int_C \omega = 0$

(証明)

$\Longrightarrow$ $x = x_0$, $y = y_0$ として、O.K.

$\Longleftarrow$ $^\forall(x,y)$ に対して、経路の取り方によらず

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega = \cdots \tag{5.60}$$

は γ と γ', $\cdots$ の終点 (x,y) と起点 (x_0,y_0) だけによる。それを $F(x,y)$ とすると

$$\int_\gamma \omega = F(x,y) - F(x_0,y_0) \tag{5.61}$$

まず、x-軸にそって

$$\begin{aligned} F(x+h,y) - F(x,y) &= \int_\gamma (Pdx + Qdy) = \int_x^{x+h} P(\xi,y)d\xi \ , \\ \frac{F(x+h,y) - F(x,y)}{h} &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} P(\xi,y)d\xi \end{aligned} \tag{5.62}$$

$P(x,y)$ は連続より、$h \to 0$ として

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = P(x,y) \qquad : \quad \text{連続} \tag{5.63}$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = Q(x,y) \qquad : \quad \text{連続} \tag{5.64}$$

従って $F(x,y)$ は連続的微分可能で

$$\omega = Pdx + Qdy = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)dy = d\,F \tag{5.65}$$

(H. カルタン「複素函数論」(岩波) 参照)