(略解) H19.7.25

問 1

(1) 慣性系: 慣性の法則 (外から力が働かなければ、物体が静止、あるいは一直線上の等速運動を続ける) が成り立つ様な座標系。例えば、宇宙空間で他の天体から無限に離れた空間にある座標系。慣性系では、ニュートンの運動の 3 法則が成り立つ。

(2) 保存力: 2 点間を結ぶ経路にそって力の場がする仕事が、その経路によらない様な力。あるいは、全ての閉じた経路にそっての仕事がゼロである様な力。万有引力やバネの力がその例である。これらは、スカラー函数であるポテンシャルの偏微分に、マイナス符号をつけたものとして表すことが出来る。

(3) 角運動量の保存則: 或る質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ とその運動量 $\boldsymbol{p}$ から外積によって作られるベクトル量である角運動量 $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}]$ が、或る条件のもとに時間に関して不変なこと。その質点に働く力 $\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{r}$ の方向を向き、中心力であれば、角運動量は保存される。質点系の場合には、内力が中心力であり、外力が働かなければ、角運動量は保存される。太陽をまわる惑星の運動では、万有引力が中心力であるから、角運動量は保存され、運動は 1 平面上にあり、面積速度は一定である。

問 2

(a) 系全体の運動エネルギーは $K = (1/2)mv^2$. 重心は速度 $v_G = v/2$ で運動しているから、重心運動の運動エネルギーは $K_G = (1/2)2mv_G^2 = (1/4)mv^2$, 重心系における全エネルギーは $K' = (1/2)m(v - v_G)^2 + (1/2)m(-v_G)^2 = (1/2)\mu v^2 = (1/4)mv^2$. ここに、$\mu = m/2$ は換算質量。$K = K_G + K'$ のうち K' だけがバネのエネルギーに変換されるから

$$\frac{1}{4}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \longrightarrow x = v\sqrt{\frac{m}{2k}} \tag{1}$$

(b) 弾性衝突の時の衝突後の 2 つのブロックの運動を重心系でみると、バネに蓄えられたエネルギーはバネの弾性力により再び 2 つのブロックに均等に分配され、バネの長さが自然長になった段階でそれぞれ $-v/2$ と $v/2$ の速度で飛び去ることとなる。これを、実験室系でみると、はじめ v で飛んでいたブロックは静止し、バネのついたブロックは速度 v で飛び去る。系全体のエネルギーははじめは、入射したブロックが持ち、衝突後はバネのついたブロックが持つ。

完全非弾性衝突の場合に衝突後の運動を重心系でみれば、バネが自然長に戻ったあとも 2 つのブロックは飛び去ることなく、バネで繋がれた振幅 x の単振動をすることとなる。この時、2 つのブロックの重心は常に原点にある。これを、実験室系でみると、2 つのブロックは角振動数 $\omega = \sqrt{2k/m}$ で互いに振動しながら、全体としては速度 $v/2$ で運動する。この時、はじめ衝突したブロックがもっていたエネルギーのうち半分は 2 つのブロックの内部エネルギー (振動エネルギー) に変換され、残り半分が 2 つのブロックが一体として運動する運動エネルギーに変っていることがわかる。

問 3

(a) $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ を換算質量、v を相対運動の円運動の回転速度として

$$\mu\frac{v^2}{a} = G\frac{m_1 m_2}{a^2} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a}} \tag{2}$$

そこで、円運動の周期は

$$T = \frac{2\pi a}{v} = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{G(m_1+m_2)}} \tag{3}$$

(b) 今度は v を直線運動の相対速度として、エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = -G\frac{m_1 m_2}{a} \qquad \text{for} \qquad r < a \tag{4}$$

ここから

$$\frac{dr}{dt} = v = \pm\sqrt{2G(m_1+m_2)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)} \tag{5}$$

負符号を選択して、これを $t = 0 \sim T'$ $(r = a \sim 0)$ まで積分して

$$T' = \int_0^{T'} dt = \int_0^a \frac{dr}{\sqrt{\frac{2G(m_1+m_2)}{a}\left(\frac{a}{r}-1\right)}} \tag{6}$$

$r = ax$ により x へ積分変数変換して

$$T' = \sqrt{\frac{a}{2G(m_1+m_2)}}\,a\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}} = \sqrt{\frac{a}{2G(m_1+m_2)}}\,a\frac{\pi}{2} \tag{7}$$

これを、Eq. (3) と比較して $T' = (1/4\sqrt{2})T$ を得る。

(コメント)

問 1 は力学の基本概念を問うたのですが、意外に出来ていません。慣性系ではなしに、慣性力や非慣性系の説明をしている人が多くいました。保存力では、力のする仕事が経路によらないということと、力がポテンシャルの偏微分で表されるということが皆様方の理解の中で、結び付いていません。角運動量の定義がベクトルの外積で書けない人が多くいます。また、角運動量が保存するための条件は、力が中心力の場合です。保存力と中心力の区別が出来ない人がいます。これらは、授業で詳しくやりましたので、講義ノートで復習してください。配点は各 15 点です。例が与えられていない人は各 5 点減、角運動量保存則でその根拠が中心力であることが書かれていない答案は 5 点減です。

問 2 は問題を速度 $v/2$ で動く重心系で考えてから、それを元の座標系に戻すと簡単だということを示した問題ですが、(a) で「全エネルギーを 2 つのブロックの重心運

動のエネルギーと重心系でのエネルギーに分解することにより」とヒントが書いてあるのに、わざわざ最初から最後まで、複雑な実験室系で考えている人が半数以上です。弾性衝突とは、二つの物体がエネルギーを失うことなくまた同じ状態で出て行くことですから、「不完全弾性衝突」などという言葉は在りません。弾性衝突でなければ、全て非弾性衝突です。二つのブロックが一体となって振動しながら、速度 $v/2$ で飛び去るありさまは、二つの原子や原子核が一つの複合粒子の励起状態に転移する融合反応を模写しています。始め、入射ブロックの持っていたエネルギーの半分は質量 $2m$ を持つ重心の並進運動のために使われ、残りの半分がバネの振動のために使われるのです。バネの振動は位置エネルギーと運動エネルギーの和が一定ですが、これは重心系でのみ成り立つことで、これを実験室系で記述しようとすると複雑で大変です。「重心系を考えることで、そのような困難が回避出来る」ということが言いたかった訳ですが、あまり伝わらなかったようです。点数配分は (a) 10 点、(b) が 弾性衝突と完全非弾性衝突のそれぞれの場合について 10 点です。(a) で 実験室系での最後のブロックの速度が 0 と v である事が書いてなかったり、(b) でエネルギーの配分が正しく書いてない場合には 5 点ずつ引いてあります。

問 3 は講義の最後でやった万有引力の 2 体問題の簡単な場合です。まず。(a) は当然出来ると思ったのですが、ほとんどの人が換算質量と相対運動という、講義 2 回分のテーマに注意していません。正しい結果を得た人も、重心からの腕の長さを a で表して解いています。二種類の速度や角速度を導入している人も多く見受けられました。周期は一定ですから、角速度が二通りあるはずがありません。速度は v_1 と v_2 で違いますが、正しくやると一通りの周期がでます。この過程で多くの人が間違えています。しかし、「そうした複雑なことをしなくてもいい」というのがニ体問題を一体問題に帰着させる、重心-相対変換のいい点です。これを理解しない限り、高校生の物理を越えていません。配点は 15 点です。換算質量を間違えて、答えが変わってしまったもの ($G(m_1+m_2)$ のことです) は 5 点減少、二通りの周期を出して平然としている人は、更に 5 点減です。

(b) は少し難しいかな、と思って「エネルギーの保存則を用いよ」とヒントを与えたのですが、ほとんどの人がこのヒントを生かすことなく、運動方程式で解こうとしています。これは、等加速度運動ではありませんから、そのような方法では (出来るかもしれませんが) 難しいです。予想に反し、ほとんどの人が出来ていませんでしたので、配点を抑えて 10 点にしました。問題の出典は、ゴールドシュタインの教科書「古典力学」の 106 ページにある演習問題 1 です。

60 点以上が合格です。試験答案を事務室、あるいは私のところまで取りに来て下さい。

7 月 31 日 (火曜日) まで: 吉田南 1 号館、全学共通科目学生窓口
それ以後: 北部構内、理学部 6 号館 (化学教室) 572 号室、藤原まで

以上