(略解) H12.10.9

1) 例 1) $f(z)=\bar{z}$. 実軸上で $f(z)=x$. C を単位円にとると

$$\int_C \bar{z}dz=\int_C z\bar{z}\frac{dz}{z}=\int_C \frac{dz}{z}=2\pi i\neq 0$$

例 2) $f(z)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)=\frac{1}{z^2+1}$. 実軸上で $f(z)=\frac{1}{x^2+1}$. C を $z=i$ のまわりの半径 1 の円とすると、2 項目は利かないから

$$\int_C f(z)dz=\frac{1}{2i}\int_C \frac{1}{z-i}dz=\pi\neq 0$$

2) の (i) $s>0$ の時は、右図の contour を考えて Cauchy の積分定理を適用する

$$\int_{-\rho}^{-\varepsilon}\frac{e^{ist}}{t}dt+\int_{\pi}^{0}e^{is\varepsilon e^{i\theta}}id\theta+\int_{\varepsilon}^{\rho}\frac{e^{ist}}{t}dt+\int_0^{\pi}e^{is\rho e^{i\theta}}id\theta=0 \quad (1)$$

そこで

$$\int_{-\rho}^{-\varepsilon}\frac{e^{ist}}{t}dz+\int_{\varepsilon}^{\rho}\frac{e^{ist}}{t}dz=\int_0^{\pi}e^{is\varepsilon e^{i\theta}}id\theta-\int_0^{\pi}e^{is\rho e^{i\theta}}id\theta$$

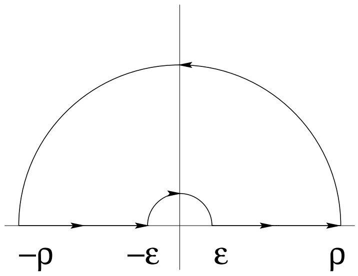

図 1: contour for $s>0$

$\varepsilon\to 0$ へいくと、右辺第 1 項目 $\to i\pi$. 2 項目で

$$\left|\int_0^{\pi}e^{is\rho e^{i\theta t}}id\theta\right|\leq\int_0^{\pi}|e^{is\rho(\cos\theta+i\sin\theta)}|d\theta\leq\int_0^{\pi}e^{-\rho s\sin\theta}d\theta=2\int_0^{\pi/2}e^{-\rho s\sin\theta}d\theta$$

$0\leq\theta\leq\pi/2$ では $\sin\theta\geq(2/\pi)\theta$ より、$s>0$ の時

$$右辺\leq 2\int_0^{\pi/2}e^{-\rho s\frac{2}{\pi}\theta}d\theta=\frac{\pi}{\rho s}\left(1-e^{-\rho s}\right)\to 0 \quad \text{for} \quad \rho\to\infty$$

そこで

$$\lim_{\rho\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\rho}^{-\varepsilon}\frac{e^{ist}}{t}dt+\int_{\varepsilon}^{\rho}\frac{e^{ist}}{t}dt\right)=i\pi \quad \text{for} \quad s>0$$

$s=0$ の時は

$$\mathcal{P}\int_{-\rho}^{\rho}\frac{1}{t}dt=\lim_{\rho\to\infty}\left(\int_{-\rho}^{-\varepsilon}\frac{1}{t}dt+\int_{\varepsilon}^{\rho}\frac{1}{t}dt\right)=\lim_{\rho\to\infty}\left(-\int_{\varepsilon}^{\rho}\frac{1}{t}dt+\int_{\varepsilon}^{\rho}\frac{1}{t}dt\right)=0$$

$s<0$ の時は、下半平面を回る半円を考えるか、$s>0$ の時の complex conjugate (c.c.) をとる。

2) の (ii)　　$\alpha > 0$ として右図の contour を考える。

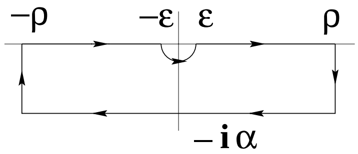

図 2: contour for 2) (ii)

$$\int_{-\rho}^{-\varepsilon} \frac{e^{ist}}{t} dt + \int_{-\pi}^{0} e^{is\varepsilon e^{i\theta}} i d\theta + \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{e^{ist}}{t} dt + \int_{0}^{-\alpha} \frac{e^{is(\rho+it)}}{\rho+it} i dt$$
$$+ \int_{\rho}^{-\rho} \frac{e^{is(t-i\alpha)}}{t-i\alpha} dt + \int_{-\alpha}^{0} \frac{e^{is(-\rho+it)}}{-\rho+it} i dt = 0 \qquad (2)$$

より

$$\int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{is(t-i\alpha)}}{t-i\alpha} dt = \int_{-\rho}^{-\varepsilon} \frac{e^{ist}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{e^{ist}}{t} dt + \int_{-\pi}^{0} e^{is\varepsilon e^{i\theta}} i d\theta - \int_{0}^{\alpha} \frac{e^{is(\rho-it)}}{\rho-it} i dt - \int_{0}^{\alpha} \frac{e^{-is(\rho+it)}}{\rho+it} i dt$$

右辺 1 - 2 項は、 2) の (i) に対応. 3 項目は $\to i\pi$ for $\varepsilon \to 0$. 4 項目は、もし、$s \neq 0$ なら

$$\left| \int_{0}^{\alpha} \frac{e^{is(\rho-it)}}{\rho-it} i dt \right| \leq \int_{0}^{\alpha} \frac{e^{st}}{\sqrt{\rho^2+t^2}} dt \leq \frac{1}{\rho} \int_{0}^{\alpha} e^{st} dt = \frac{1}{\rho s}(e^{s\alpha}-1) \to 0 \quad \text{for} \quad \rho \to \infty$$

5 項目は 4 項目の c.c. より、同じく消える。また、$s = 0$ の時は、もとの式で $t = \tan\theta$ の変数変換により直接積分が出来ます。

2) の (iii)　　3 次元局座標で積分する.

$$Y(\boldsymbol{r}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{q}^2+m^2} d\boldsymbol{q} = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty q^2 dq \frac{1}{q^2+m^2} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) e^{iqr\cos\theta}$$
$$= \frac{1}{r} \frac{2}{2\pi i} \lim_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{q e^{iqr}}{q^2+m^2} dq = \frac{1}{r} \frac{1}{2\pi i} \lim_{\rho\to\infty} \int_{-\rho}^{\rho} \left(\frac{1}{q-im} + \frac{1}{q+im} \right) e^{iqr} dq$$

ここで、(i) - (ii) から

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{ist}}{t-i\alpha} dt = \begin{cases} e^{-s\alpha} \\ (1/2) e^{-s\alpha} \\ 0 \end{cases} \quad \text{for} \quad \begin{cases} s > 0 \\ s = 0 \\ s < 0 \end{cases}$$

が任意の $\alpha > 0$ について成り立つ。これを用いて、1 項目 $\to e^{-mr}/r$、2 項目 $\to 0$.

3)　　$f(t) = e^{-t}/t$ を複素函数と考えて、示された contour について Cauchy の積分定理を適用すると

$$\int_{\delta}^{\rho} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\rho}^{\rho z} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\rho z}^{\delta z} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\delta z}^{\delta} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0 \qquad (3)$$

簡単な変数変換により

$$\int_{\delta}^{\rho} \left(e^{-t} - e^{-zt} \right) \frac{dt}{t} = \int_{1}^{z} \frac{e^{-\delta t}}{t} dt - \int_{1}^{z} \frac{e^{-\rho t}}{t} dt$$

ここで、$\delta \to 0$ で、1 項目 $\to \int_1^z \frac{dt}{t} = \log z$、$\rho \to \infty$ で 2 項目 $\to 0$ for $\Re e z > 0$ となるはず。実際

$$1\text{ 項目} = \int_\delta^{\delta z} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_\delta^{\delta z} \left[\frac{1}{t} - \frac{1-e^{-t}}{t} \right] dt = \log t|_\delta^{\delta z} - R_\delta = \log z - R_\delta$$

ここに、$R_\delta = \int_\delta^{\delta z} \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ は、$(1-e^{-t})/t \to 1$ for $t \to 0$ (除きうる特異点) より、$\lim_{\delta\to 0} R_\delta = 0$. また、2 項目では、$z = a + ib$ $(a > 0)$ として

$$2\text{ 項目} = \int_1^z \frac{e^{-\rho t}}{t} dt = \int_1^{a+ib} \frac{e^{-\rho t}}{t} dt = \int_1^a \frac{e^{-\rho t}}{t} dt + \int_a^{a+ib} \frac{e^{-\rho t}}{t} dt$$

ここに、$a > 0$ を使うと

$$\left| \int_1^a \frac{e^{-\rho t}}{t} dt \right| \le e^{-\rho \min\{1,a\}} \int_1^a \frac{1}{t} dt = e^{-\rho \min\{1,a\}} \log a \to 0 \quad \text{for} \quad \rho \to \infty$$

$$\left| \int_a^{a+ib} \frac{e^{-\rho t}}{t} dt \right| = \left| \int_0^b \frac{e^{-\rho(a+iy)}}{a+iy} i dy \right| \le e^{-\rho a} \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} \le e^{-\rho a} \frac{b}{a} \to 0 \quad \text{for} \quad \rho \to \infty$$

(コメント)

1) 番は、解析性ということが本当にわかっているかを試す問題です。函数 $f(z)$ と C をうまくとらないと、実軸上 (原点) で不連続になったり、実函数にならなかったり、また、C の積分がたまたま 0 になったりします。例えば、1 番目の例では、$f(z) = z\bar{z}$ ととると、単位円についての contour 積分がゼロになってしまいます。ほとんどの人が、複雑過ぎる函数で、正方形の径路を考えて計算ミスをしています。(計算ミスは減点です。)

2) 番の (i) は前期の物理学演習でやったはずです。すべては、まず、それぞれの contour について Cauchy の積分定理を具体的に書き下す事から始まります。これだけで、問題は半分解けたのと同様です。(上の、 (1)、(2)、(3) の式がちゃんと書けておれば、それだけで半分点を与えました。) 後は、それぞれの segment の積分でその値を知ること、及び、それが 0 になるなら、その積分の絶対値の estimate を与えることです。特に、(i) の大きな半円の部分の寄与が 0 になるのは、数学では、「Jordan の補題」と呼ばれているものの一番簡単な場合ですが、そこでの $\sin\theta$ を $(2/\pi)\theta$ に置き換える手法は、1 度もやったことがない人には難しかったかもしれません。ちゃんと出来ていた人は 5 - 6 人しかいませんでした。

(ii) は、$t - i\alpha$ の部分が長方形のどの部分に対応するか考えればすぐ分かると思ったのですが、ほとんどの人が上半平面に広がった長方形を考えているのはなぜでしょうか？ こうした問題の場合、大体いつも sigurality に近い部分の積分 (ここでは、小さな半円の部分) から有限の寄与が出ることは覚えておいてください。

(iii) は、物理への最も簡単な応用問題として出したのですが、ほとんどの人が手をつけていません。(もう一つの応用例は、3 次元 Schrödinger 方程式の Green 函数です。)

3 次元極座標を使って丹念に計算すれば、(i) と (ii) を結び付けて得られる関係式に帰着します。(直交座標では計算できません。) (i) と (ii) がたとえ出来なくても、その結果が与えられているのだから、独立に解いてくれるだろうと思ったのですが....

3) 番の問題は、もし、contour の図がなければ難しい問題ですが、それが与えられているのだから、或る程度出来るはずです。E.T. Whittaker and G.N. Watson : A Course of Modern Analysis の 116 ページに出ている例題です。

配点は 1)、2) の (i)、(ii)、(ii)、3) のそれぞれについて各 20 点です。3) 番はほとんど出来ていなかったので、全体を 80 点に renormalize して、その半分の 40 点を合格点とします。