(略解) H13.10.9

I. 1) $\dot{\zeta} = \dot{r}e^{i\theta} + ire^{i\theta}\dot{\theta}$ より

$$\log z = \int_0^1 \frac{1}{re^{i\theta}}\left(\dot{r}e^{i\theta} + ire^{i\theta}\dot{\theta}\right)dt = \int_0^1 \frac{\dot{r}}{r}dt + i\int_0^1 \dot{\theta}dt$$
$$= \int_1^{|z|}\frac{dr}{r} + i\int_0^{\arg z} d\theta = \log|z| + i\arg z$$

2) $\gamma_0,\ \gamma_1$ では、 $\log|z| + i\mathrm{Arg}\, z$; γ_2 では、 $\log|z| + i(\mathrm{Arg}\, z + 2\pi)$。ここに、$-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$ は複素数 z の偏角の主値。

3) 原点から負の実軸に添って cut を入れて、これを越えて積分経路が行かない様にする。つまり、1 と z を結ぶ直線、γ_0 によって log の主値

$$\mathrm{Log} z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \log|z| + i\mathrm{Arg}\, z$$

を定義する。ここに、$-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$。このとき、$z$ が負の実軸上では、$\mathrm{Log} z = \log|z| + i\pi = \log(-z) + i\pi$ である。

II. 1) C を、原点を中心とする半径 r の円として、Cauchy の積分定理より

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

と表わされる。そこで、$M > \mathrm{Max}_{z\in C}|f(z)|$ として

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(re^{i\theta})|}{r^n}d\theta < \frac{M}{r^n}$$

2) R を任意の正数として、$|z| < R$ に対して

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{|a_n z^n|}{n\,!} < M\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\left(\frac{R}{r}\right)^n \to 0 \quad \text{as} \quad N\to\infty$$

従って、任意の半径 R の円の内部で絶対一様収束である。→ 収束半径 $=\infty$ → 整函数。また

$$|\phi(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}|a_n||z|^n < M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}\left(\frac{|z|}{r}\right)^n = Me^{\frac{|z|}{r}}$$

n 回微分についても、$\phi^{(n)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_{n+m}}{n\,!}z^m$ を使えば簡単。

3) 上の $\phi(z)$ の estimate を用いると

$$|F(z)| \leq \int_0^{\infty} e^{-t}|\phi(zt)|dz \leq M\int_0^{\infty} e^{-\left(1-\frac{|z|}{r}\right)t}dt$$

右辺の積分は、$|z| < r$ の時、収束して

$$|F(z)| \leq \frac{M}{1-\frac{|z|}{r}}$$

従って、$F(z)$ も $|z|<r$ の時、収束する。

この時、$F(z)$ が解析的であることは、一般的な定理によって示すことも出来るが、被積分函数の estimate が与えられているのだから、直接 Morera の定理により示すのが簡単。γ を $|z|<r$ に含まれる任意の閉じた経路として、$\int_\gamma F(z)dz=0$ を示す。R を任意の正数として

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(z)dz &= \int_\gamma \left\{\int_0^R e^{-t}\phi(zt)dt+\int_R^\infty e^{-t}\phi(zt)dt\right\}\\ &= \int_0^R e^{-t}\left\{\int_\gamma \phi(zt)dz\right\}dt+\int_\gamma dz\int_R^\infty e^{-t}\phi(zt)dt\end{aligned}$$

1 項目の積分は 0 より、2) の estimate を使うと

$$\begin{aligned}&\left|\int_\gamma F(z)dz\right| \le \int_\gamma |dz|\int_R^\infty e^{-t}|\phi(zt)|dt \le \int_\gamma |dz|\int_R^\infty e^{-t}Me^{\frac{|z|}{r}t}dt\\ &= \int_\gamma |dz|\frac{1}{1-\frac{|z|}{r}}e^{-\left(1-\frac{|z|}{r}\right)R}\end{aligned}$$

γ 上の z に対して、$|z|<r_0<r$ なる r_0 を十分 r に近くとると

$$\left|\int_\gamma F(z)dz\right| \le M\frac{e^{-\left(\frac{1}{1-\frac{r_0}{r}}\right)R}}{1-\frac{r_0}{r}}\times \text{length of } \gamma$$

ここに、R は任意に大きくとれるから、$\int_\gamma F(z)dz=0$ が示せる。

4) 部分積分により

$$\begin{aligned}&F(z)=\int_0^\infty e^{-t}\phi(zt)dt=\Big[-e^{-t}\phi(zt)\Big]_0^\infty+z\int_0^\infty e^{-t}\phi'(zt)dt\\ &=\Big[-e^{-t}\phi(zt)\Big]_0^\infty+\Big[-e^{-t}\phi'(zt)\Big]_0^\infty z+z^2\int_0^\infty e^{-t}\phi''(zt)dt\\ &=\cdots\\ &=\sum_{n=0}^N\Big[-e^{-t}\phi(zt)^{(n)}\Big]_0^\infty z^n+R_N(z)\end{aligned}$$

ここに

$$R_N(z)=z^{N+1}\int_0^\infty e^{-t}\phi^{(N+1)}(zt)dt$$

2) の $\phi(zt)$ の estimate を使うと

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}e^{-t}\phi^{(n)}(zt)=\phi^{(n)}(0)=a_n\\ &\lim_{t\to\infty}e^{-t}|\phi^{(n)}(zt)|\le \lim_{t\to\infty}e^{-t}\frac{M}{r^n}e^{\frac{|z|t}{r}}=\frac{M}{r^n}\lim_{t\to\infty}e^{-\left(1-\frac{|z|}{r}\right)t}=0 \quad \text{if} \quad |z|<r\end{aligned}$$

更に、$|z|<r$ の時、3) の $|F(z)|$ の estimate と同様にして

$$|R_N(z)|\le \frac{M}{1-\frac{|z|}{r}}\left(\frac{|z|}{r}\right)^{N+1}\to 0 \quad \text{as} \quad N\to\infty$$

5) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ の時、$^{\forall}a_n=1$ より、$\phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$。そこで

$$F(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}e^{zt}dt=\int_0^{\infty} e^{-(1-z)t}dt$$

この積分は、$\Re e(1-z)>0$ なら収束して、領域 $\Re ez<1$ で解析的な函数、$F(z)=\frac{1}{1-z}$ を与える。(この場合は、3) の最後の解析性の証明で、γ として、$\Re ez<1$ の半平面に含まれる任意の閉じた経路がとれる。)

III. 講義ノートの 50 ページに与えられているので省略。

(コメント)

I の $\log z$ を積分表示式で定義する方法は、例えば、G. H. Hardy の A Course of Pure Mathematics の Chapter X に詳しく出ています。(そこでは、log と Log の notation が、我々と逆ですが ...) だいたい出来ていましたが、3) で、ほとんどの人が cut を複素平面の「正」の実軸に入れているのはどうしたことでしょうか？ それでは、$z=1$ の回りに Taylor 展開出来ないではありませんか。主値のとり方は函数によって異なり、一番便利なようにとるのです、複素数 z の場合は $0<\mathrm{Arg}z\leq 2\pi$ が普通ですが、$\mathrm{Log}\, z$ の場合は $-\pi<\mathrm{Arg}z\leq\pi$ が普通です。「解析概論」の 238 ページの記述を注意深く読んでください。この点を間違えた人は、減点です。

II で、べき級数 $f(z)$ の解析性の条件として $|z|=1$ を含めることは実は不要です。1) の Cauchy 条件を証明しやすい様に含めておいたのですが、こうすると、$\lim_{n\to\infty}|a_n|r^n=0$ や $|a_n|r_n\leq\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r_n<M$ から、簡単に出てしまいます。しかし、その推論が皆さん正確ではありません。3)、4) では、$t=\infty$ における無限積分と、$\sum_{n=0}^{\infty}$ の無限和の取り扱いが essential です。それらが、2) の estimate を使うことで、全て簡単に解決するということに注意して下さい。Borel の積分の面白い所は、この積分表示式を用いて、もとのべき級数の解析接続を、その初めの収束半径を越えて求められるということですが、この問題では、一番簡単な $1/(1-z)$ の函数の $\Re e\ z<1$ の場合にそれを確かめて頂きたかったのです。一般の場合の処方とその証明は、かなり難しいですが、例えば、E.T. Whittaker and G.N. Watson、A Course of Modern Analysis の 141 ページ、7.81 や、E.C. Titchmarsh、The Theory of Functions の 164 ページ、 21. にあります。興味のある人は、自分で勉強して下さい。

III については、何も言うことはありません。初めて、講義ノートに出ている問題をそのまま出しました。勉強しておれば出来て当然です。出典は、上と同じ A Course of Modern Analysis の 101 ページ、Example 1 です。

配点は、 I - II が各設問ごとに 10 点、III が 20 点です。50 点以上が合格です。

以上