

I. 解析関数の性質は、いくらもあります。例えば、1)  $f(z) = u + iv$  の実部と虚部が Cauchy-Riemann の関係を満たすこと。2)  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0$ 。3) Cauchy の定理を満たす。4) Cauchy の積分定理を満たす。5) 実部と虚部が調和函数である。6) 平均値の性質を満たす。7) 最大値の原理、最小値の原理を満たす。8)  $D$  内の任意点でべき級数に展開できる。9) 何回でも微分可能。10) 局所的原始関数の存在。11)  $D$  に含まれるある点の近傍で常に  $f(z) = 0$  なら、実は  $D$  全体で  $f(z) = 0$ 。12) 零点が孤立する。等々 .... この内、5 つ書いてあって、それぞれ簡単な説明が添えてあると O.K.

II. まず、 $\Gamma$  函数の表式で、 $t = \xi^2$  として

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^\infty e^{-\xi^2} \xi^{2x-1} d\xi$$

そこで

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty d\xi d\eta e^{-(\xi^2+\eta^2)} \xi^{2x-1} \eta^{2y-1}$$

ここで、 $\xi = r \cos \theta$ ,  $\eta = r \sin \theta$  と極座標に移って

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(x+y)-1} dr \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta$$

$r$  の積分は  $\Gamma(x+y)$ 。  $\theta$  の積分は、 $t = (\cos \theta)^2$  として  $t$  の積分に移ると

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = B(x, y)$$

III. 1)  $H_0(x) = 1$ ,  $H_1(x) = 2x$ ,  $H_2(x) = 4x^2 - 2$  等。

2) まず、 $H_n(x)$  の定義を使って、 $n$  について足しあげると

$$w(x, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n = e^{x^2} e^{-t \frac{\partial}{\partial x}} e^{-x^2}$$

これを、 $e^{x^2} e^{-t \frac{\partial}{\partial x}} e^{-x^2} e^{t \frac{\partial}{\partial x}} \cdot 1$  と書いて、 $e^{-t \frac{\partial}{\partial x}} e^{-x^2} e^{t \frac{\partial}{\partial x}}$  を求める。  $A = -t \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $B = x$  として、公式を使うと

$$e^{-t \frac{\partial}{\partial x}} x e^{t \frac{\partial}{\partial x}} = x - t$$

一般に、べき展開できる  $x$  の解析函数  $f(x)$  に対して

$$e^{-t \frac{\partial}{\partial x}} f(x) e^{t \frac{\partial}{\partial x}} = f(x - t)$$

( $e^{t \frac{\partial}{\partial x}}$  は、いわゆる shift operator である。) そこで、 $f(x) = e^{x^2}$  に対して

$$w(x, t) = e^{x^2} e^{-(x-t)^2} = e^{2xt-t^2}$$

$e^{2xt-t^2}$  は  $t$  の解析函数だから、収束半径は  $\infty$ 。

- 2) の別解。  $w(x, t) = e^{2xt-t^2}$  があらかじめ分かっていると、これは、  $t$  について全複素平面で解析的 (整函数) だから、収束半径  $\infty$  で Taylor 展開できて

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) t^n$$

ここに

$$f^{(n)}(0) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^n e^{2xt-t^2} \Big|_{t=0} = e^{x^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^n e^{-(t-x)^2} \Big|_{t=0}$$

$t$  から  $u = x - t$  の微分に移ると

$$f^{(n)}(0) = e^{x^2} \left( -\frac{d}{du} \right)^n e^{-u^2} \Big|_{u=x} = (-1)^n e^{x^2} \left( \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$$

- 3) (注) から、  $e^{-x^2}$  の式は自明。これを、  $H_n(x)$  の定義の最後の  $e^{x^2}$  に代入すると

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2xui} du$$

積分は

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-u^2+2xui}| du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = 1$$

より、  $x$  について絶対一様収束だから、微分と積分が交換できる。何回微分しても同様。あとは、簡単。

- 4) 3) を使うと

$$\begin{aligned} W(x, y, t) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) t^n \\ &= \frac{1}{\pi} e^{x^2+y^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-(u^2+v^2)+2(xu+yv)i} \frac{1}{n!} (-2uvt)^n \end{aligned}$$

sum と積分の順序が交換できると仮定すると

$$W(x, y, t) = \frac{1}{\pi} e^{x^2+y^2} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-(u^2+v^2)+2(xu+yv)i-2uvt}$$

今度は、  $u$  と  $v$  の積分を (注) の Gauss 積分の公式を使って順番に積分する。この時 (2 回目の積分で)、  $|t| < 1$  が必要。sum と積分の順序が交換出来る事は、  $|t| < \eta < 1$  なる  $\eta$  に対して

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-(u^2+v^2)+2(xu+yv)i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2uvt)^n \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dve^{-(u^2+v^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2|u||v||\eta|)^n \\
&= 4 \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} dve^{-(u^2+v^2)+2uv\eta} \\
&= 4 \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} dve^{-(1-\eta)(u^2+v^2)-\eta(u-v)^2} \\
&\leq 4 \int_0^{\infty} due^{-(1-\eta)u^2} \int_0^{\infty} dve^{-(1-\eta)v^2} \leq \infty
\end{aligned}$$

から分かる。

IV. まず、 $q = 0$  の時、 $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$  で O.K.。  $z = 0$  の時 1 で、trivial である。従って、 $0 < |q| < 1$ ,  $0 < |z| < 1$  と仮定して証明すればよい。

1)

$$\begin{aligned}
h_a(z) - h_{a+1}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{a+1})(1-q^{a+2}) \dots (1-q^{a+n-1})(1-q^a - 1 + q^{a+n})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} z^n \\
&= -q^a z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{a+1})(1-q^{a+2}) \dots (1-q^{a+1+n-2})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^{n-1})} z^{n-1} \\
&= -q^a z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{a+1})(1-q^{a+2}) \dots (1-q^{a+1+n-1})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} z^n = -zq^a h_{a+1}(z)
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
h_a(z) - h_a(qz) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^a)(1-q^{a+1}) \dots (1-q^{a+n-1})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} (1-q^n) z^n \\
&= (1-q^a) z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{a+1})(1-q^{a+2}) \dots (1-q^{a+1+n-2})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^{n-1})} z^{n-1} \\
&= (1-q^a) z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{a+1})(1-q^{a+2}) \dots (1-q^{a+1+n-1})}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^n)} z^n = z(1-q^a) h_{a+1}(z)
\end{aligned}$$

3) まず、1) より

$$h_a(z) = (1 - zq^a) h_{a+1}(z)$$

が得られるから、これと 2) を用いて  $h_{a+1}(z)$  を消去すると、 $q^a, zq^a \neq 1$  の時

$$h_a(z) = \frac{1 - zq^a}{1 - z} h_a(qz)$$

が成り立つ。そこで、これを  $n$  回使うと

$$\begin{aligned}
h_a(z) &= \frac{1 - zq^a}{1 - z} \frac{1 - zq^{a+1}}{1 - zq} h_a(q^2 z) \\
&= \dots \\
&= \frac{(1 - zq^a)(1 - zq^{a+1}) \dots (1 - zq^{a+n-1})}{(1 - z)(1 - zq) \dots (1 - zq^{n-1})} h_a(q^n z)
\end{aligned}$$

ここで、 $n \rightarrow \infty$  として、 $q^n z \rightarrow 0$ ,  $h_a(0) = 1$  より

$$h_a(z) = \frac{(1 - zq^a)(1 - zq^{a+1}) \cdots (1 - zq^{a+n-1}) \cdots}{(1 - z)(1 - zq) \cdots (1 - zq^{n-1}) \cdots}$$

4)  $a \rightarrow \infty$  とすると、 $q^a \rightarrow 0$  より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^n)} z^n = \frac{1}{(1 - z)(1 - zq)(1 - zq^2) \cdots}$$

5)  $z \rightarrow zq^{-a}$  と変えて、 $|zq^{-a}| < 1$  or  $|z| < |q|^a$  なら

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{-a} - 1)(q^{-a} - q) \cdots (q^{-a} - q^{n-1})}{(1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^n)} z^n = \frac{(1 - z)(1 - zq)(1 - zq^2) \cdots}{(1 - zq^{-a})(1 - zq^{-a+1})(1 - zq^{-a+2}) \cdots}$$

$a \rightarrow -\infty$  とすると、 $q^{-a} \rightarrow 0$  より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{1+2+\cdots+(n-1)}}{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \cdots (1 - q^n)} z^n = (1 - z)(1 - zq)(1 - zq^2) \cdots$$

ここで、 $z \rightarrow -z$  と変えて、求める結果を得る。

(注意)

○  $(1 - z)(1 - zq)(1 - zq^2) \cdots$  は、 $|q| < 1$  の時、絶対収束する無限乗積である。実際

$$\sum_{n=0}^{\infty} |zq^n| = \frac{|z|}{1 - |q|}$$

○  $h_a(z)$  の収束半径は

$$a_n = \frac{(1 - q^a)(1 - q^{a+1})(1 - q^{a+2}) \cdots (1 - q^{a+n-1})}{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \cdots (1 - q^n)}$$

として

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{1 - q^{a+n}}{1 - q^{n+1}} \right| \leq \frac{1 + |q|^{a+n}}{1 - |q|^{n+1}}$$

そこで、 $n \rightarrow \infty$  へ行って、収束半径は 1。かつ、 $|z| < 1$  の時

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z^n = 0$$

今、 $N$  を十分大きくとれば、 $\forall a > 0, \forall n > N$  に対して

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{1 + |q|^N}{1 - |q|^N}$$

そこで、 $\frac{1+|q|^N}{1-|q|^N}|z| < \rho < 1$  として

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n z^n| \leq |a_{N+1} z^{N+1}| \frac{1}{1-\rho} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad N \rightarrow \infty$$

ここに、 $|z| < \rho \frac{1-|q|^N}{1+|q|^N}$ 。つまり、収束は  $a$  に関して一様。そこで、まず  $a \rightarrow \infty$  として、その後  $N \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 1$  に近づけると、Euler の公式は  $|z| < 1$  で成り立つ。5) も同様にして、 $a \rightarrow -\infty$  の極限がとれる。この場合は、収束半径は  $\infty$ 。つまり、5) は整函数である。

(コメント)

I は例年通り点を取ってもらおうための問題です。だいたいの人が出来ていました。ただし、「連続関数である」などという trivial な事を書いたり、間違った事を書いた人、また説明が不十分な時は減点してあります。6 点  $\times$  5=30 点です。

II は講義でやっておくようにといった問題です。部分積分でやった人もかなりいましたが、それだと  $x, y$  が整数の時しか証明できません。(10 点) まず、 $\Gamma$  函数の積分表示式で  $t = \xi^2$  の変数変換によって Gauss 積分の形に直した後、極座標表示に移るのがコツですが、そのままで、正確に積分区間を指定すると出来ます。出来たほとんどの人がこの方法で解いていました。配点は 25 点です。

III は Hermite 函数の積分表示式と母関数展開の問題です。2) は、量子力学で使う Hausdorff の公式の良い練習問題になると思って出したのですが、皆さん何故か  $A$  と  $B$  の使い方が逆です。微分作用素を指数函数の肩にのせるという発想が、やったことのない人には難しかったかもしれません。しかし、母関数の答えが既に分かれば、単に  $t$  の Taylor 展開です。 $t$  の整函数ですから、もちろん収束半径は  $\infty$  です。D'Alembert's ratio で計算するためには、 $H_n(x)$  の estimate がいりますから、そう容易ではありません。4) が全くできていません。2 次元の Gauss 積分ですが、一つの変数ずつ順番に積分していけば出来ます。Gauss 積分は厳密に計算できるほとんど唯一の場合で、物理では幅広く使いますので、十分慣れ親しんでおいて下さい。出典は、N. N. Lebedev, Special Functions and Their Applications の Hermite 多項式のところです。配点は、各小問ごとに 5 点。全部で、20 点です。

IV は、楕円テータ函数や、最近の  $q$  deformation の発展の基礎になった Euler の Partition function についての問題です。導き方が示されていないと誰も解けませんが、数式が多少複雑で少し難しいかなと思ったのですが、授業で学んだ無限乗積とベキ級数の組み合わせで良い例になると思ったので出しました。証明は、Thomas Ernst の論文 History of  $q$ -Calculus and A New Method, p.49 Theorem 2.4 に与えられている証明 (そこでは、もっと一般的な場合の証明が与えられている) を参照致しました。厳密な証明には、一様収束性、収束半径、極限と sum や積の交換等多くの検証が必要ですが、ここでは、そこまで要求していません。ただ、3) で  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_a(q^n z) = h_a(0) = 1$  がちゃんと書かれていない場合は、2 点減点致しました。皆さん、意外によく出来ていて、自分の頭で考える京大魂の健在を頼もしく思いました。これからも、一步一步正

確に議論を進めて行く習慣を身につけていって下さい。配点は各 5 点で全部で 25 点です。

100 点満点で 50 点以上が合格です。50 - 59 までが可、60 - 79 が良、80 - 100 を優としました。点数の分布は homepage の Message board のところを見て下さい。平均点は、49.3 点でした。

以上