(コメント) H11.10.12

正直言って、あまりに出来ていないので愕然としました。1) 番、2) 番は、点を取ってもらうための問題です。授業中にやっておくようにと言って試験の範囲を示したのに、完答した人がほとんどいないのはどうしたことでしょうか？ これだけで合格点 (50 点に設定) になるようにしたのに、寂しい限りです。(真面目に勉強しておれば ... と言った意味は、当然、やっておくように言ったことをやっておくという事です。) 採点は、自分で推論していく習慣がついていると思われる人には、甘く、" 自明" を連発する人には辛くしてあります。以下に、解き方を説明しておきますから参考にしてください。

1) 番の必要条件は、ほとんどの人が出来ていました。十分条件は講義で言ったように、$h = \rho e^{i\theta}$ $\rho \to 0$ として、極限が θ に依存しない事をいえば良いのです。わざわざ、下線を引いて、あらゆる 方向を強調したのに、的はずれの事を書いている人が多く見受けられました。

2) Schwarz の鏡像原理は、例えば、カルタンの教科書の 72 ページにあります。

$$h(z) = \begin{cases} f(z) \\ \overline{f(\overline{z})} \end{cases} \qquad \text{for} \quad \begin{cases} \Im m z \geq 0 \\ \Im m z < 0 \end{cases}$$

と定義した $h(z)$ が下半平面で解析的なことは、例えば、$(\partial h(z)/\partial \overline{z}) = 0$ for $\Im z < 0$ を示すことによって、すぐ分かります。全平面で解析的、を示すのは、実軸に平行な任意の長方形についての contour 積分が 0 である事を示して Morera の定理を使えばよいのです。どこで、$f(z)$ が実軸上で実数かつ連続という条件を使っているか、注意深く考えてみてください。Morera の定理に気が付いている人は、1 人 (+ 2 人) だけということはどういうことでしょうか？ これは講義で言ったと思いますが ...

3) の実変数の Gauss 積分は、ほとんどの人が出来ていました。しかし、そのあとの contour 積分の応用が出来ていません。α だけずらす方は、α が実数の時、単なる変数変換であることを確かめた後、α は純虚数であると仮定して実軸に沿った長方形で、$-R$ から R への積分を $-R + ib$ から $R + ib$ への積分に移せばいいのです。その時、$R \to \infty$ としたときの 0 になる部分を、ちゃんと estimate した式で確かめてください。(ほんの僅かの人しかそれが出来ていません。) λ を掛ける方も同様で、$\lambda = |\lambda| e^{i\phi}$ として、変数変換により $|\lambda| = 1$ としておいてから角度 $\phi/2$ の扇型の積分路について e^{-z^2} の contour 積分を考えるのです。条件は $\Re e \lambda > 0$ でよろしいが、実際には $\lambda = \pm i$ でも異常積分としては収束します。(Fresnel 積分) ここでは、そこまでは要求していません (が、誰か気が付いて欲しい !)

4) は多少難しかったかもしれません。数学的帰納法を用いて完答した人が一人いましたが、ねらいは、Laurent 展開を使ってもらうために出した問題です。Laurent 展開の係数 a_m は、例えば、原点のまわりの単位円を contour として

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z^{m+1}} dz = \sum_{r=1}^{n} (r-1)! \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^z}{z^{m+r+1}} dz$$

であたえられます。ここに、積分は $m+r \geq 0$ の時のみ non-zero で、e^z の Taylor 展開の式より

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z^{m+r+1}}dz &= \frac{1}{(m+r)!}\frac{(m+r)!}{2\pi i}\oint \frac{e^z}{z^{m+r+1}}dz \\
&= \frac{1}{(m+r)!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m+r} e^z|_{z=0} = \frac{1}{(m+r)!} \qquad \text{for} \quad m+r \geq 0
\end{aligned}
$$

そこで、

$$
a_m = \sum_{r=\max\{1,-m\}}^{n} \frac{(r-1)!}{(m+r)!}
$$

あとは、$m=0,\ -s\ (s=1,2\cdots n)$ と $m>0$ に分けて和の公式を使えば良いのですが、ほとんどの人がここまで到達していません。ヒントの公式は、はじめのものは二項展開 $(1/(1-x)=1+x+x^2+\cdots$ の一般化) ですし、二番目のものは

$$
\frac{1}{(1-x)^{a+1}} = \frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x)^a}
$$

と分けて、はじめのものを使い x^u のべきを比較すれば簡単に導けます。一方、$m>0$ の時の公式は

$$
\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+m)} = \frac{1}{m}\left[\frac{1}{r(r+1)\cdots(r+m-1)} - \frac{1}{(r+1)(r+2)\cdots(r+m)}\right]
$$

を使って、ひとつずつずらしていく総和法のよく知られた公式 (岩波数学公式集 II 6 ページ参照) です。