Pentaquark ノート

Y.F.　　2004.1.5

3. これまでのまとめ

$$
\begin{aligned}
|\Phi^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+)\rangle &= \mathcal{A}'_{2-2}\widehat{\Phi}^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+) \\
\widehat{\Phi}^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+) &= \phi^{\boldsymbol{e}}_{(0p)}(\boldsymbol{\rho},\nu)\,\phi_{(0s)}(\boldsymbol{\lambda},\frac{4}{5}\nu) \\
&\quad\times\Big[\Big[\phi_{0(01)(01)}(q^2)\,\phi_{0(01)(01)}(q^2)\Big]_{0(02)(10)}\,\xi_{\frac{1}{2}(01)(01)}(\bar{q})\Big]_{\frac{1}{2}S_z(03)200(00)} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここに Pentaquark state Θ^+ の量子数は $Y = n + S = 4/3 - 1/3 + 1 = 2$, $Q/e = Y/2 + I_z = 2/2 + 0 = 1$。また vector coherent state の定義は

$$
\begin{aligned}
\phi^{\boldsymbol{e}}_{(0p)}(\boldsymbol{r},\nu) &= \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{\phi}_{(0p)}(\boldsymbol{r},\nu) = \sum_\mu e^*_\mu\,\phi_{1\mu}(\boldsymbol{r},\nu) \\
&= 2\sqrt{\nu}\,(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r})\,\phi_{(0s)}(\boldsymbol{r},\nu) = 2\sqrt{\nu}\,(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r})\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\,e^{-\nu\,\boldsymbol{r}^2} \\
&= R_1(r,\nu)\sum_\mu Y_{1\mu}(\widehat{\boldsymbol{r}})\,e^*_\mu = R_1(r,\nu)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}(\widehat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{e}) \\
R_1(r,\nu) &= 2\sqrt{\nu}\,r\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}\,e^{-\nu\,\boldsymbol{r}^2}\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

反対称化された baryon-meson state ($(3q)(q\bar{q})$ state) を

$$
\begin{aligned}
|\Psi^{\boldsymbol{a}}_{\frac{1}{2}S_z}\rangle &= \mathcal{A}'_{3-1}\widehat{\Psi}^{\boldsymbol{a}}_{\frac{1}{2}S_z} \\
\widehat{\Psi}^{\boldsymbol{a}}_{\frac{1}{2}S_z} &= \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\,\Big[\phi_{\frac{1}{2}(11)}(q^3)\,\phi_{0(11)}(q\bar{q})\Big]_{\frac{1}{2}S_z(03)200} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

で定義する。ここに $\gamma = (6/5)\nu = (3b^2/5)$ は相対の拡がりパラメータである。(b は $(3q)$ の拡がりパラメータ) 同様に $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})$ を $A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z})$, $e^{i\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ で置き換えたものを、それぞれ $\widehat{\Psi}^{\boldsymbol{z}}$, $\widehat{\Psi}^{\boldsymbol{k}}$ とする。それぞれ GCM kernel, Born kernel に対応する。(スピン添字 $(1/2)S_z$ は適宜省略する。) また、クラスター間の反対称化 operator は

$$
\mathcal{A}'_{2-2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 - P_{13} - P_{23}) \quad , \qquad \mathcal{A}'_{3-1} = \frac{1}{\sqrt{4}}(1 - P_{14} - P_{24} - P_{34}) \qquad (4)
$$

とする。Pentaquark state と $(3q)(q\bar{q})$ state の間の overlap は S-factor $S_1 = (1/4)\sqrt{5/3}$ を用いて

$$
\begin{aligned}
I(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) &= \langle\Psi^{\boldsymbol{z}}|\Phi^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+)\rangle = S_1\,(\boldsymbol{z}^*\cdot\boldsymbol{e}) \\
I(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}) &= \langle\Psi^{\boldsymbol{a}}|\Phi^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+)\rangle = S_1\,\phi^{\boldsymbol{e}}_{(0p)}(\boldsymbol{a},\gamma) \\
I(\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}) &= \langle i\,\Psi^{\boldsymbol{k}}|\Phi^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+)\rangle = S_1\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\phi^{\boldsymbol{e}}_{(0p)}\left(\boldsymbol{k},\frac{1}{4\gamma}\right) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

と表される。

Reduced width amplitude (RWA) を定義するために Pentaquark の角運動量状態を $J = 1 \otimes 1/2 = 1/2 \oplus 3/2$ として

$$
\begin{aligned}
|\Theta^+; JM\rangle &= \mathcal{A}'_{2-2} \left\{ \left[\phi^{\boldsymbol{e}}_{\ell=1}(\boldsymbol{\rho}, \nu)\, \phi_{(0s)}(\boldsymbol{\lambda}, \frac{4}{5}\nu) \left[\left[\phi_{0(01)(01)}(q^2) \right.\right.\right. \right. \\
&\qquad \left. \left.\left. \times \phi_{0(01)(01)}(q^2) \right]_{0(02)(10)} \xi_{\frac{1}{2}(01)(01)}(\bar{q}) \right]_{\frac{1}{2}(03)200(00)} \right]_{JM} \Bigg\} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

で定義すると

$$
\begin{aligned}
|\Phi^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+)\rangle &= \sum_{JM} \sum_{\mu} e^*_\mu \langle 1\mu \frac{1}{2} S_z | JM \rangle\, |\Theta^+; JM\rangle \\
|\Theta^+; JM\rangle &= \frac{3}{4\pi} \int d\hat{\boldsymbol{e}} \sum_{\mu S_z} \langle 1\mu \frac{1}{2} S_z | JM \rangle\, e_\mu\, \Phi^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

同様に $(3q)(q\bar{q})$ state も

$$
\begin{aligned}
|\Psi^{\boldsymbol{a}}_{\frac{1}{2}S_z}\rangle &= \sum_{JM} \sum_{\ell m} \langle \ell m \frac{1}{2} S_z | JM \rangle\, Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{a}})\, \mathcal{A}'_{3-1} \left\{ \frac{\delta(r-a)}{r^2}\, h_{(\ell\, \frac{1}{2})JM} \right\} \\
h_{(\ell\, \frac{1}{2})JM} &= \left[Y_\ell(\hat{\boldsymbol{r}}) \left[\psi_{\frac{1}{2}(11)}(q^3)\, \psi_{0(11)}(q\bar{q}) \right]_{\frac{1}{2}(03)200} \right]_{JM} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

そこで RWA を

$$
y_\ell(a) = \langle \mathcal{A}'_{3-1} \left\{ \frac{\delta(r-a)}{r^2}\, h_{(\ell\, \frac{1}{2})JM} \right\} |\Theta^+; JM\rangle \qquad (9)
$$

で定義すると、これは rotatonal invarience から JM によらないから

$$
\begin{aligned}
I(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}) &= \langle \Psi^{\boldsymbol{a}}_{\frac{1}{2}S_z} | \Phi^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+) \rangle = S_1\, \phi^{\boldsymbol{e}}_{(0p)}(\boldsymbol{a}, \gamma) \\
&= \sum_\mu e_\mu\, Y^*_{1\mu}(\hat{\boldsymbol{a}})\, y_1(a) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, (\boldsymbol{e} \cdot \hat{\boldsymbol{a}})\, y_1(a) \qquad (10)
\end{aligned}
$$

そこで

$$
\begin{aligned}
y_1(a) &= S_1\, R_1(a; \gamma) \\
{S_1}^2 &= \int_0^\infty a^2\, da\, y_1(a)^2 = \left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{3}} \right)^2 = \frac{5}{48} \sim 10\ \% \qquad (11)
\end{aligned}
$$

S_1 は所謂 spectroscopic factor (Θ^+ にどれだけの割合いで $(3q)(q\bar{q})$ 成分が含まれているかという量) である。また reduced width を

$$
\theta_1(a) = \sqrt{\frac{a}{3}}\, a\, y_1(a) = S_1 \sqrt{\frac{a}{3}}\, a\, R_1(a; \gamma) \qquad (12)
$$

で定義すると

$$\begin{aligned}\theta_1(a) &= \sqrt{\frac{2}{15}}\left(\frac{6}{5\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{2}}\, e^{-\frac{3}{5}\left(\frac{a}{b}\right)^2} \\ &= C\, x^{\frac{5}{2}}\, e^{-\frac{3}{5}x^2} \qquad \text{with} \quad x=\frac{a}{b},\ C=\sqrt{\frac{2}{15}}\left(\frac{6}{5\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{13}$$

この計算では波動函数の tail 部分は信用できないので、むしろ幅の最大値を調べるため、$\theta_1(a)$ の maximum value を求める。換算幅 $\theta_1(a)$ は $x=5/2\sqrt{3}$ で最大で

$$\left(\theta_1(a)\right)_{\max}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{e}\right)^{\frac{5}{4}}=0.205860 \qquad \rightarrow \quad \left(\theta_1(a)\right)_{\max}{}^2=0.0424 \tag{14}$$

となる。幅を求める Kapur-Peierls の公式

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\,P_1(a)\,{\gamma_W}^2\,\theta_1(a)^2 \\ P_1(a) &= \frac{ka}{F_1(ka)^2+G_1(a)^2}=\frac{\rho^3}{1+\rho^2} \qquad \text{with} \quad \rho=ka \\ {\gamma_W}^2 &= \frac{3\hbar^2}{2\,m\,a^2}=180.5\,\frac{1}{a^2}\end{aligned} \tag{15}$$

に代入すると

$$\Gamma=2\,\frac{\rho^3}{1+\rho^2}\,180.5\,\frac{1}{a^2}\,\theta_1(a)^2 \qquad \text{with} \quad \rho=ka=\frac{5}{2\sqrt{3}}(bk) \tag{16}$$

ここに数値としては

$$\begin{aligned} Mc^2 &= 1540 \text{ MeV} \qquad M_nc^2=939.57 \text{ MeV} \qquad M_{K^+}c^2=493.7 \text{ MeV} \\ pc &= 269.6 \text{ MeV} \qquad k=1.366 \text{ fm}^{-1}\end{aligned} \tag{17}$$

($p=\sqrt{(M+M_n+M_K)(M-M_n+M_K)(M+M_n-M_K)(M-M_n-M_K)}/2M$) を用いた。Table 1 の表は $\left(\theta_1(a)\right)_{\max}{}^2=0.0424$ と fix した場合の数値例である。公式のチャンネル a の依存性は大きいが、$\left(\theta_1(a)\right)_{\max}{}^2=0.0424$ を採る限り Γ の値は大変安定しており $\Gamma\sim 14$ MeV 程度である事が分る。

4. Vertex function への変換

以下では Pentaquark state をまた別の自由度による Feshbach resonance と考えた場合の Feshbach formalism による幅の検討を行う。結論から先に言うと、この場合も $\Gamma\sim 15$ MeV という結果が得られる。この考え方では H を full Hamiltonian として PHQ の transition matrix element が幅ともとの resonance のエネルギーシフトを与えると考える。ここに、P, Q はそれぞれ $(3q)(q\bar{q})$ state とそれ以外の (Pentaquark state の成分を主に含む) 模型空間への projection operator である。(Section 7 参照) すなわち計算すべき量は $\langle(3q)(q\bar{q})|PHQ|\Theta^+\rangle$ である。今この matrix element が

$$\langle i\,\Psi^{\boldsymbol{k}}_{\frac{1}{2}S_z}|PHQ|\Phi^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+)\rangle=\mathcal{E}\,\langle i\,\Psi^{\boldsymbol{k}}_{\frac{1}{2}S_z}|\Phi^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+)\rangle \tag{18}$$

Table 1: 上の三つは $(\theta_1(a))_{\max}{}^2 = 0.0424$ と fix して a を $a = (5/2\sqrt{3})b$ から求めたもの。その下の二つは、$(\theta_1(a))_{\max}{}^2$ をそのままにして、それ以外の部分の a 依存性を調べた。

b (fm)	a (fm)	ρ	$P_1(a)$	${\gamma_W}^2$ (MeV)	Γ (MeV)
0.50	0.722	0.986	0.486	346	14.3
0.55	0.793	1.083	0.585	287	14.2
0.60	0.867	1.184	0.691	240	14.1
0.60	1.0	1.366	0.889	180.5	13.6
0.69	1.2	1.639	1.194	125.3	12.7

とある大きさの matrix element $\mathcal{E}$ で表されたとする。我々はこの coupling matrix element を以下の様に Pentaquark-baryon-meson vertex の形に書く。

$$\begin{aligned}
\langle i\,\Psi^{\boldsymbol{k}}_{\frac{1}{2}S_z}(a\beta)|PHQ|\Phi^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+)\rangle &= \langle B_{\frac{1}{2}S_z(11)a}|H_\beta|\Theta^+;\frac{1}{2}M\rangle \\
&= \langle B_{\frac{1}{2}S_z(11)a}|\frac{1}{\sqrt{2\,m_\beta}}\,\Gamma_\beta|\Theta^+;\frac{1}{2}M\rangle \\
\text{with}\qquad \Gamma_\beta &= \sqrt{4\pi}\,\frac{1}{m_\beta}\,f_{\Theta^+a\beta}(k)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}) \qquad (19)
\end{aligned}$$

ここに $a\beta$ は baryon-meson 配位を表し, PHQ が (flavor symmetry breaking による) 弱い flavor 依存性しか持たないと仮定すると

$$\begin{aligned}
\Psi^{\boldsymbol{k}}_{\frac{1}{2}S_z}(a\beta) &= \sum_{(\lambda\mu)}\langle(11)a(11)\beta|(\lambda\mu)200\rangle\,\Psi^{\boldsymbol{k}}_{\frac{1}{2}S_z(\lambda\mu)} \\
&\sim \langle(11)1II_z(11)1I-I_z|(03)200\rangle\,\Psi^{\boldsymbol{k}}_{\frac{1}{2}S_z} = (-1)^{\frac{1}{2}-I_z}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\Psi^{\boldsymbol{k}}_{\frac{1}{2}S_z} \qquad (20)
\end{aligned}$$

としてよい。(I_z は nucleon の isospin) また中心力に対しては $\mathcal{E}$ は k の scalar 函数なので上の変換は Eq. (18) の overlap 函数に対して行っておけばよい。そこに含まれる $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k})$ term に対して $\Phi^{\boldsymbol{e}}_{\frac{1}{2}S_z}(\Theta^+)$ から $|\Theta^+;\frac{1}{2}M\rangle$ への変換を行うと

$$\frac{3}{4\pi}\int d\hat{\boldsymbol{e}}\,\sum_\mu\langle 1\mu\frac{1}{2}S_z|\frac{1}{2}M\rangle\,e_\mu\,(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k}) = \sum_\mu\langle 1\mu\frac{1}{2}S_z|\frac{1}{2}M\rangle\,k_\mu \qquad (21)$$

一方

$$\langle B_{\frac{1}{2}S_z}|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})|\Theta^+;\frac{1}{2}M\rangle = (-\sqrt{3})\,\sum_\mu\langle 1\mu\frac{1}{2}S_z|\frac{1}{2}M\rangle\,k_\mu \qquad (22)$$

より vertex function に移るには overlap で $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k}) \to (-1/\sqrt{3})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})$ と置き換えるだけでよい。そこで Eq. (2), Eq. (5) を使うと Eq. (19) は

$$(-1)^{\frac{1}{2}-I_z}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathcal{E}\,S_1\,(2\pi)^{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{k}\,R_1\left(k;\frac{1}{4\gamma}\right)\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})$$

$$= H_K = \frac{1}{\sqrt{2\,m_K}}\,\sqrt{4\pi}\,\frac{1}{m_K}\,f_{\Theta^+NK}(k)\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k}) \tag{23}$$

結局

$$\begin{aligned} f_{\Theta^+NK}(k) &= (-1)^{\frac{1}{2}+I_z}\,\mathcal{E}\,S_1\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(m_K)^{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{k}\,R_1\left(k;\frac{1}{4\gamma}\right) \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}+I_z}\,S_1\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{m_K c b}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\mathcal{E}\,b}{\hbar c}\right)b^{-\frac{5}{2}}\,\frac{1}{k}\,R_1\left(k;\frac{1}{4\gamma}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

ここで最後の式は $\hbar$, c を補って $f_{\Theta^+NK}(k)$ が無次元量である事を explicit に示した。更に Eq. (2) から S_1 の値を使い $R_1\left(k;\frac{1}{4\gamma}\right)$ を explicit に表わすと

$$\begin{aligned} f_{\Theta^+NK}(k) &= (-1)^{\frac{1}{2}+I_z}\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{6\pi}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{m_K c b}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{5}{12}(bk)^2}\left(\frac{\mathcal{E}\,b}{\hbar c}\right) \\ f_{\Theta^+nK^+}(k) &= -0.549\times\frac{\mathcal{E}}{329} \qquad \text{for} \quad b = 0.6\ \text{fm} \end{aligned} \tag{25}$$

が得られる。

spin $1/2$ の baryon (mass: M) からの ps meson 崩壊過程 $B \to B_1 + M_1$ における崩壊幅の公式は Pilkuhn の教科書 (Relativistic Particle Physics, p. 184, Table 4-11.1) に与えられている。すなわち、相対論的 vertex $\Gamma_{ps} = -G\,\bar{u}_1\gamma_5 u$ に対して

$$M\,\Gamma = \frac{p}{2\sqrt{s}}\,\frac{G^2}{4\pi}\,(k_-)^2 \qquad \text{with} \quad {k_-}^2 = (M-M')^2 - m^2 \tag{26}$$

ここに、M, M', m はそれぞれ B, B_1, M_1 の mass である。これを非相対論的近似し γ_5 coupling から $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k})$ couping に移るための coupling constant の変換式

$$\frac{G}{\sqrt{4\pi}} = \frac{M+M'}{m}\,f \tag{27}$$

を用いると

$$M\,\Gamma = \frac{p}{2\sqrt{s}}\,(M+M')^2\,f^2\,\left[\left(\frac{M-M'}{m}\right)^2 - 1\right] \tag{28}$$

が得られる。結局、我々の表示で幅を求める公式は

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2}\,pc\,{f_{\Theta^+nK^+}}^2\left[\left(\frac{M_{\Theta^+}-M_n}{m_{K^+}}\right)^2 - 1\right]\left(1+\frac{M_n}{M_{\Theta^+}}\right)^2 \\ &= 167.4\,{f_{\Theta^+nK^+}}^2 \\ &= 167.4\times\left(0.549\times\frac{\mathcal{E}}{329}\right)^2 \qquad (\text{MeV}) \end{aligned} \tag{29}$$

となる。$\mathcal{E}\sim 200$ MeV で $f\sim 0.3$ 程度、$\Gamma\sim 20$ MeV 程度である事が分る。

5. Interaction matrix element の計算

まずはじめに Eq. (18) の PHQ を quark Hamiltonian の color magnetic term だけと考えて matrix element $\mathcal{E}$ を計算する。すなわち

$$PHQ \to V = \sum_{i<j}^{1\sim5} v_{ij} \qquad \text{with} \qquad v_{ij} = \alpha_S \hbar c \frac{1}{4} (\lambda_i \lambda_j)$$
$$\times \left\{ -\pi \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \delta(\boldsymbol{r}) - \frac{1}{4} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \frac{8\pi}{3} (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)\, \delta(\boldsymbol{r}) \right\} \tag{30}$$

Section 7 で見るように、実際には (i,j) pair の sum は $1 \sim 5$ 全体ではなく $(3q)(q\bar{q})$ 間の pair だけを採るのが正しい処方である。すなわち

$$H \to V_r = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=4}^{5} v_{ij}$$
$$\text{with} \qquad v_{ij} = \alpha^{\rm CM}\, \delta\left(\frac{\boldsymbol{r}}{b}\right) \left[1 + \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)\right] \frac{1}{4} (\lambda_i \lambda_j) = \alpha^{\rm CM}\, u_{ij}\, w_{ij}\, w_{ij}^C$$
$$\text{where} \qquad \alpha^{\rm CM} = -\pi\, \alpha_S\, x^3\, mc^2 \qquad \text{with} \quad x = \left(\frac{\hbar}{mcb}\right) \tag{31}$$

以下には参考のため、全ての (i,j) 成分について結果を示しておく。以下、空間部分 (u_{ij}), spin-flavor 部分 (w_{ij}), color 部分 (w_{ij}^C) のそれぞれについて overlap $I_N(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{e})$ との比において結果を示すのが便利である。また空間部分と color 部分については唯一つの pair (i,j) についてであるが、spin-flavor part については multiplicity についての和をとって結果を示す。

(空間部分) $\qquad u_{ij} = \delta\left(\frac{\boldsymbol{r}}{b}\right)$

基礎になる 2 体 matrix element は

$$\langle (0s)_{\boldsymbol{a}} | (0s)_{\boldsymbol{c}} \rangle^{-1} \langle (0s)_{\boldsymbol{b}} | (0s)_{\boldsymbol{d}} \rangle^{-1} \langle (0s)_{\boldsymbol{a}} (0s)_{\boldsymbol{b}} | \delta\left(\frac{1}{b}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\right) | (0s)_{\boldsymbol{c}} (0s)_{\boldsymbol{d}} \rangle$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\nu}{4}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})^2} \tag{32}$$

である。GCM kernel を計算するのに Pentaquark side の $((\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{x}_4)/2 - (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)/2)$ は計算が厄介なので、実際はこれらも coherent state で記述して

$$I_{ij}^{\rm space}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{e}) = \frac{1}{2}\, e^{\frac{\boldsymbol{z}^{*2}}{2}} \langle (0s)_{-\frac{2}{5}\frac{\boldsymbol{z}}{\sqrt{\gamma}}}{}^3 (0s)_{\frac{3}{5}\frac{\boldsymbol{z}}{\sqrt{\gamma}}}{}^2 | \delta\left(\frac{1}{b}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)\right) | (0s)_{-\frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{\nu}}}{}^2 (0s)_{\frac{\boldsymbol{e}}{\sqrt{\nu}}}{}^2 (0s) \rangle \tag{33}$$

を計算し、$\boldsymbol{e}$ の 1 次の項を拾うのが簡単である。この様にして overlap の空間部分 $I_N^{\rm space}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{e}) = (1/2)\sqrt{5/6}\, (\boldsymbol{z}^* \cdot \boldsymbol{e})$ との比として次の結果を得る。

$$I_{ij}^{\rm space}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{e}) \;=\; I_N^{\rm space}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{e}) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\times \begin{cases} 1 & \text{for} \quad i,j = 12,\ 13,\ 23\ (3q) \text{ and } 45\ (q\bar{q}) \\ e^{-\frac{5}{24}(\boldsymbol{z}^*)^2} \begin{cases} 0 & \begin{cases} i,j = 14,\ 24 \\ i,j = 34 \end{cases} \\ 1 & \begin{cases} i,j = 15,\ 25 \\ i,j = 35 \end{cases} \\ \frac{1}{2} & \\ \frac{3}{2} & \end{cases} \end{cases} \tag{34}$$

(spin-flavor 部分) $\qquad w_{ij} = 1 + \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)$

中間 couping の様相を詳細に検討すると spin-flavor 部分と color 部分はいずれもそれぞれが operator の期待値として overlap の部分とは別に括りだせることが分る。この期待値を $\langle w_{ij} \rangle$ で表すと、容易に次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} (3q): &\qquad \langle \textstyle\sum_{i<j}^{3} w_{ij} \rangle = 1 \\ (q\bar{q}): &\qquad \langle w_{45} \rangle = -1 \\ V_r: &\qquad \langle w_{14} + w_{24} \rangle = 2 \quad \langle w_{34} \rangle = -1 \\ &\qquad \langle w_{15} + w_{25} \rangle = 2 \quad \langle w_{35} \rangle = 3 \end{aligned} \tag{35}$$

(color 部分) $\qquad w_{ij}^C = \frac{1}{4}(\lambda_i \lambda_j)$

$$\begin{aligned} (3q): &\qquad \langle w_{ij}^C \rangle = -\tfrac{2}{3} \qquad\qquad \text{for} \quad i,j = 12,\ 13,\ 23 \\ (q\bar{q}): &\qquad \langle w_{45}^C \rangle = -\tfrac{3}{4} \\ V_r: &\qquad \langle w_{14}^C \rangle = \langle w_{24}^C \rangle = \tfrac{1}{3} \quad \langle w_{34}^C \rangle = -\tfrac{2}{3} \\ &\qquad \langle w_{15}^C \rangle = \langle w_{25}^C \rangle = -\tfrac{1}{3} \quad \langle w_{35}^C \rangle = \tfrac{2}{3} \end{aligned} \tag{36}$$

これらの部分を組合せると coupling の GCM kernel として

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) &= \langle \Psi^{\boldsymbol{z}} | \sum_{i<j}^{5} v_{ij} | \Phi^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+) \rangle \\ &= \alpha^{\mathrm{CM}} \left\{ \left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \right) + e^{-\frac{5}{24}(\boldsymbol{z}^*)^2} \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3} \right) \right\} I_N(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \alpha_S\, x^3\, mc^2 \left[\left(-\frac{1}{6} \right) + \left(-\frac{5}{6} \right) e^{-\frac{5}{24}(\boldsymbol{z}^*)^2} \right] I_N(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) \qquad \text{with} \\ I_N(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) &= \langle \Psi^{\boldsymbol{z}} | \Phi^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+) \rangle = S_1\,(\boldsymbol{z}^* \cdot \boldsymbol{e}) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}\,(\boldsymbol{z}^* \cdot \boldsymbol{e}) \end{aligned} \tag{37}$$

はじめに述べた様に、ここから内部エネルギーの部分は除く。

Born kernel への変換は再び公式

$$e^{i\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right)^{\frac{3}{4}} e^{\frac{\boldsymbol{k}^2}{4\gamma}} \int d\boldsymbol{a}\, e^{-\frac{\gamma}{2}\,a^2 + i\,\boldsymbol{k}\boldsymbol{a}}\, A_\gamma(\boldsymbol{r}, \sqrt{\gamma}\,\boldsymbol{a}) \tag{38}$$

によって行われる。その結果 Eq. (18) の $\mathcal{E}$ として

$$\mathcal{E} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2\,\left(-\frac{5}{6}\right)\,\left(\frac{12}{17}\right)^{\frac{5}{2}}\,e^{\frac{5\cdot 5}{17\cdot 6}(bk)^2} \tag{39}$$

という結果を得る。ここで新しいパラメータ $\sqrt{2/\pi}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2$ が現れるが、それをいつもの様に color magnetic interaction による N-Δ mass splitting

$$\Delta E = E_\Delta - E_N = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2\,\frac{2}{3} = 1232 - 939 = 293 \quad \text{MeV} \tag{40}$$

から決めると $\sqrt{2/\pi}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2 = 440$ MeV となる。そこで公式 Eq. (29) から

$$\mathcal{E} = -440\,\frac{5}{6}\,0.4186\,1.1790 = -181 \quad \text{MeV} \qquad \rightarrow \qquad \Gamma = 15.3 \quad \text{MeV} \tag{41}$$

となる。

6. $(3q)(q\bar{q})$ GCM kernel

Section 7 で見る様に、正確な formulation のでは Pentaquark state と $(3q)(q\bar{q})$ state の間の非直交性からくる小さな coupling term が存在しており、その計算のためには $(3q)(q\bar{q})$ exchange kernel が必要である。ここでは $(3q)(q\bar{q})$ RGM を行う事が目的ではないので、今注目している color magnetic term に対してだけ GCM kernel の計算結果を示す。定義は

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z}') &= \langle \mathcal{A}'_{3-1} A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z})\,h((3q)(q\bar{q}))|\sum_{i<j}^{5} v_{ij}|\mathcal{A}'_{3-1}\,A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z}')\,h((3q)(q\bar{q}))\rangle \\ &= \langle A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z})\,h((3q)(q\bar{q}))|\sum_{i<j}^{5} v_{ij}|(1-3\,P_{34})\,A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z}')\,h((3q)(q\bar{q}))\rangle \\ &= I^D(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z}') + I^E(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z}') \end{aligned} \tag{42}$$

である。ここに $(3q)$ は spin $1/2$ の ground state baryon, $(q\bar{q})$ は spin 0 の pseudoscalar meson の量子数を持つとする。$(3q)$, $(q\bar{q})$ クラスターとも color singlet であるので、direct term には direct potential の項 (V_r の項) は存在しない。従って、direct term は内部エネルギーの寄与だけで非常に簡単である。

$$I^D(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z}') = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2\,\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\right)\,e^{\boldsymbol{z}^*\cdot\boldsymbol{z}'} \qquad \text{for} \quad (3q) \quad \text{and} \quad (q\bar{q}) \tag{43}$$

exchange term については前節と同じようにして計算する。まず空間部分は

$$\begin{aligned} I^{\rm space}_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z}') &= (-3)\,e^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}^{*2}+\boldsymbol{z}'^2)}\,\langle (0s)_{-\frac{2}{5}\frac{\boldsymbol{z}}{\sqrt{\gamma}}}{}^3 (0s)_{\frac{3}{5}\frac{\boldsymbol{z}}{\sqrt{\gamma}}}{}^2 |\delta\left(\frac{1}{b}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)\right)| \\ &\quad \times (0s)_{-\frac{2}{5}\frac{\boldsymbol{z}'}{\sqrt{\gamma}}}{}^2 (0s)_{\frac{3}{5}\frac{\boldsymbol{z}'}{\sqrt{\gamma}}} (0s)_{-\frac{2}{5}\frac{\boldsymbol{z}'}{\sqrt{\gamma}}} (0s)_{\frac{3}{5}\frac{\boldsymbol{z}'}{\sqrt{\gamma}}}\rangle \\ &= (-3)\,e^{\frac{1}{6}\boldsymbol{z}^*\cdot\boldsymbol{z}'}\,\mathcal{T}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z}') \end{aligned} \tag{44}$$

Table 2: $(3q)(q\bar{q})$ GCM kernel の空間部分 ($\mathcal{T}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z}')$), spin-isospin factors ($I^{SF}_{\mathcal{T}}$), および color factors (I^{C}_{ij})

$\mathcal{T}$	(i,j)	$\mathcal{T}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z}')$	$I^{SF}_{\mathcal{T}}$	I^{C}_{ij}
E_{11}	12	1	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
S'_1	13, 23	$e^{-\frac{5}{24}\boldsymbol{z}'^2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{3}$
S_1	14, 24	$e^{-\frac{5}{24}\boldsymbol{z}^{*2}}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{3}$
S_2	35	$e^{-\frac{5}{24}\boldsymbol{z}^{*2}}$	$-\frac{4}{9}$	0
S'_2	45	$e^{-\frac{5}{24}\boldsymbol{z}'^2}$	$-\frac{4}{9}$	0
D_-	34	$e^{-\frac{5}{24}(\boldsymbol{z}^*-\boldsymbol{z}')^2}$	$\frac{4}{9}$	0
D_+	15, 25	$e^{-\frac{5}{24}(\boldsymbol{z}^*+\boldsymbol{z}')^2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$

ここに $\mathcal{T}$ は interaction type で (i,j) pair と Table 2 の関係で結びついている。Table 2 には Pentaquark の量子数 $(\lambda\mu)YII_z = (03)200$ を持つ $(3q)(q\bar{q})$ チャンネルの spin-flavor factor と color factor も与えられている。antiquark の存在により添字の無い interaction type $\mathcal{T}$ は spin-flavor factor や color factor を指定するのに十分でない事に注意する。また、spin-flavor factor は再び multiplicity について和をとったものである。

Section 7 で必要なのは V_r term に対する exchange term である。上の結果からこの GCM kernel に対して

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{z};\boldsymbol{z}') &= (-3)\,\langle A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z})\,h((3q)(q\bar{q}))|\sum_{i<j}^{5} v_{ij}|P_{34}\,A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z}')\,h((3q)(q\bar{q}))\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2\,\frac{1}{9}\,e^{\frac{1}{6}\boldsymbol{z}^*\cdot\boldsymbol{z}'}\,\left[e^{-\frac{5}{24}\boldsymbol{z}^{*2}}+e^{-\frac{5}{24}(\boldsymbol{z}^*+\boldsymbol{z}')^2}\right] \end{aligned} \tag{45}$$

という結果が得られる。

7. Formulation

($(3q)(q\bar{q})$ wave function)

今相対波動函数 χ を L_2 可積分と仮定して h を (角運動量表示による) 内部波動函数とする。$\mathcal{A}'$ はクラスターにまたがる反対称化 operator でその permutation の数を N とする。

$$\begin{aligned} \Psi &= \mathcal{A}'\,\{h\,\chi\} \\ \mathcal{A}' &= \frac{1}{\sqrt{N}}\,{\sum}'\,\delta_P\,P \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{A}'^2 = \sqrt{N}\,\mathcal{A}' = {\sum}'\,\delta_P\,P \end{aligned} \tag{46}$$

exchange normalization kernel K を以下の様に定義する。

$$\begin{aligned}
&\langle h|\sum\nolimits' \delta_P\, P|h\,\chi\rangle = (1-K)\,\chi \\
&\sqrt{N}\,\langle h|\mathcal{A}'|h\rangle = 1-K \qquad \text{or} \qquad \langle h|\mathcal{A}'^2|h\,\chi\rangle = 1-K
\end{aligned} \tag{47}$$

L_2 可積分函数 χ を $\langle\chi|1-K|\chi\rangle = 1$ と normalize しておくと

$$\begin{aligned}
\langle\Psi|\Psi\rangle &= \langle\mathcal{A}'\{h\,\chi\}\,|\mathcal{A}'\{h\,\chi\}\rangle = \sqrt{N}\,\langle h\,\chi|\mathcal{A}'|h\,\chi\rangle \\
&= \langle h\,\chi|\sum\nolimits' \delta_P\, P|h\,\chi\rangle = \langle\chi|1-K|\chi\rangle = 1
\end{aligned} \tag{48}$$

Reduced width amplitude (RWA) は

$$\begin{aligned}
y &= \langle h|\mathcal{A}'\{h\,\chi\}\rangle = \sqrt{N}\,\langle h|\Psi\rangle \\
&= \sqrt{N}\,\langle h|\mathcal{A}'\{h\,\chi\}\rangle = \langle h|\sum\nolimits' \delta_P\, P|h\,\chi\rangle = (1-K)\,\chi \\
S^2 &= \langle y|y\rangle = \langle\chi|(1-K)^2|\chi\rangle
\end{aligned} \tag{49}$$

ここに S は S-factor である。

(Projection operator to the $(3q)(q\bar{q})$ configurations)

$$P = \mathcal{A}'|h\rangle\left(\frac{1}{1-K}\right)'\langle h|\mathcal{A}' \tag{50}$$

ここに $(1/(1-K))'$ における prime は allowed space における inverse を表す。explicit に書けば $(1-K)\,\chi_N = \gamma_N\,\chi_N$ として

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-K}\right)' &= \sum_{\gamma_N\neq 1}|\chi_N\rangle\frac{1}{1-\gamma_N}\langle\chi_N| \\
&= \sum_{\gamma_N\neq 1}|\chi_N\rangle\langle\chi_N| + \sum_{\gamma_N\neq 1}|\chi_N\rangle\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N}\langle\chi_N| \\
&= 1 - \sum_{\gamma_N=1}|\chi_N\rangle\langle\chi_N| + \sum_{\gamma_N\neq 1}|\chi_N\rangle\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N}\langle\chi_N| \\
&= \Lambda + \sum_{\gamma_N\neq 1}|\chi_N\rangle\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N}\langle\chi_N|
\end{aligned} \tag{51}$$

である。Λ は allowed space への projection operator である。$\mathcal{A}'\{h\,\chi_N\} = 0$ for $\gamma_N = 1$ に注意すると P は実際 projection operator としての条件 $P^2 = P$ を満している事が分る。また Eq. (46) の Ψ に対しては $P\,\Psi = \Psi$ となる。

一般に反対称状態を Φ として $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ と normalize されていると仮定する。$\Phi = P\,\Phi + Q\,\Phi$ と分解して RWA を Eq. (49) にならって $y = \sqrt{N}\,\langle h|\Phi\rangle$ で定義すると

$$P\,\Phi = \mathcal{A}'|h\rangle\,\left(\frac{1}{1-K}\right)'y \tag{52}$$

そこで

$$\left(\frac{1}{1-K}\right)' y = \sigma\,\phi \tag{53}$$

として $\langle\phi|1-K|\phi\rangle = 1$ と ϕ を normalize すると

$$\begin{aligned}
\Phi &= P\,\Phi + Q\,\Phi = \sigma\mathcal{A}'|h\phi\rangle + Q\,\Phi \\
\sigma^2 &= \langle\Phi|P|\Phi\rangle = \langle y|y\rangle + \langle y|\left(\frac{K}{1-K}\right)'|y\rangle \\
&= S^2 + \sum_{\gamma_N\neq 1}\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N}|\langle\chi_N|y\rangle|^2
\end{aligned} \tag{54}$$

が得られる。つまり、Φ は σ^2 の確率で含まれる $(3q)(q\bar{q})$ 成分とそれ以外の直交する成分 $Q\,\Phi$ に分けられる。

(coupling matrix element)

今 Φ を Pentaquark state として、その full Hamiltonian を H, 固有値の実部を E とする。(実際には連続状態だから小さな虚部がある。) $(3q)(q\bar{q})$ 状態との coupling matrix element は

$$\begin{aligned}
\langle\Psi|PHQ|\Phi\rangle &= \langle\Psi|P(H-E)Q|\Phi\rangle = \langle P\,\Psi|H-E|Q\,\Phi\rangle \\
&= \langle\Psi|H-E|Q\,\Phi\rangle = \langle\mathcal{A}'\,\{h\,\chi\}\,|H-E|Q\,\Phi\rangle \\
&= \sqrt{N}\,\langle h\,\chi|H-E|Q\,\Phi\rangle
\end{aligned} \tag{55}$$

ただし、今度は χ は連続状態である。ここで Hamiltonian H を

$$H = H_{\rm int} + T_r + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} \tag{56}$$

と分解し $(3q)(q\bar{q})$ の内部波動函数 h が内部 Hamiltonian $H_{\rm int}$ の固有状態であると仮定する。$H_{\rm int}\,|h\rangle = E_{\rm int}\,|h\rangle$ 更に $E_r = E - E_{\rm int}$ を $(3q)(q\bar{q})$ threshold から測ったエネルギーとして Eq. (55) は

$$\begin{aligned}
\langle\Psi|PHQ|\Phi\rangle &= \sqrt{N}\,\langle h\,\chi|T_r + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - E_r|Q\,\Phi\rangle \\
&= \sqrt{N}\,\langle h\,\chi|\,(T_r + U - E_r) + \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - U\right)|Q\,\Phi\rangle
\end{aligned} \tag{57}$$

と書ける。ここに 3 行目の $U = U(\boldsymbol{r})$ はこの時点では任意の $(3q)$-$(q\bar{q})$ 間ポテンシャルであるが、後では direct potential に選ぶ。まず、$\langle h|Q\,\Phi\rangle = \langle h|(1-P)\,\Phi\rangle$ であるが

$$\begin{aligned}
\langle h|P\,\Phi\rangle &= \langle h|\mathcal{A}'|h\rangle\left(\frac{1}{1-K}\right)'\langle h|\mathcal{A}'|\Phi\rangle = \sqrt{N}\,\langle h|\mathcal{A}'|h\rangle\left(\frac{1}{1-K}\right)'\langle h|\Phi\rangle \\
&= (1-K)\left(\frac{1}{1-K}\right)'\langle h|\Phi\rangle = \Lambda\,\langle h|\Phi\rangle
\end{aligned} \tag{58}$$

しかるに、再び $\mathcal{A}'\{h\,\chi_N\} = 0$ for $\gamma_N = 1$ から $\Lambda\,\langle h|\Phi\rangle = \langle h|\Phi\rangle$ である。従って $\langle h|P\,\Phi\rangle = \langle h|\Phi\rangle$ つまり $\langle h|Q\,\Phi\rangle = 0$ である。そこで Eq. (57) は

$$\begin{aligned}\langle\Psi|PHQ|\Phi\rangle &= \sqrt{N}\,\langle h\,\chi|\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - U\right)|Q\,\Phi\rangle \\ &= \sqrt{N}\,\langle h\,\chi|\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - U\right)|\Phi\rangle - \sqrt{N}\,\langle h\,\chi|\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - U\right)|P\,\Phi\rangle \end{aligned} \quad (59)$$

(注意：χ は連続状態であるから Eq. (57) で $(T_r + U - E_r)$ を左にかける事は許されない。部分積分による kinetic energy term の surface term が残る。) Eq. (59) の 2 項目で $P\,\Phi = \sigma\,\mathcal{A}'\{h\,\phi\}$ を用いると

$$\begin{aligned}2\text{ 項目} &= -\sqrt{N}\,\langle h\,\chi|\left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - U\right)|P\,\Phi\rangle \\ &= -\sigma\,\langle h\,\chi|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - U|h\,\phi\rangle - \sigma\,\langle h\,\chi|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - U|\left(\sum{}' \delta_P\,P - 1\right)\,h\,\phi\rangle \end{aligned} \quad (60)$$

そこで、$U = \langle h|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij}|h\rangle \equiv V_{\rm D}$ と選ぶと direct term は消える。結局

$$\begin{aligned}\langle\Psi|PHQ|\Phi\rangle &= \sqrt{N}\,\langle h\,\chi|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - V_{\rm D}|\Phi\rangle \\ &\quad -\sigma\,\langle h\,\chi|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij} - V_{\rm D}|\left(\sum{}' \delta_P\,P - 1\right)\,h\,\phi\rangle \end{aligned} \quad (61)$$

が得られる。

(実際計算)

Pentaquark への応用では Eq. (61) の 2 体相互作用としては色々なものが考えられるが、quark 間の meson exchange potential は long range なので Eq. (61) にはあまり寄与しないと考えられる。そこで、v_{ij} は color magnetic interaction だけをとるとすると、その $(3q)$-$(q\bar{q})$ 間の direct potential V_D は零である。更に flavor 量子数 (03)200 に対しては exchange normalization kernel $K = 0$ であり、全ての $\gamma_N = 0$ であるので $\sigma^2 = {S_1}^2$, かつ Eq. (53) から $y_1 = \sigma\,\phi = S_1\,\phi$ が成り立っている。結局 Eq. (61) は

$$\langle\Psi|PHQ|\Phi\rangle = \sqrt{N}\,\langle h\,\chi|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij}|\Phi\rangle + 3\,\langle h\,\chi|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij}|P_{34}\,h\,y_1\rangle \quad (62)$$

となる。更に $\chi = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ と平面波で近似すると Section 6 までの notation を用いて $(h = h((3q)(q\bar{q}))$

$$\begin{aligned}\langle i\,\Psi^{\boldsymbol{k}}|PHQ|\Phi^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+)\rangle &= 2\sqrt{3}\,\langle i\,\widehat{\Psi}^{\boldsymbol{k}}|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij}|\widehat{\Phi}^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+)\rangle \\ &\quad +3\,\langle e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\,h|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij}|P_{34}\,h\,y_1\rangle \end{aligned} \quad (63)$$

と書ける。この Born kernel に対応する GCM kernel は $e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$ を $A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z})$ に置き換えればよい。Eq. (63) の 1 項目は Eq. (37) で与えられている。(V_r に対応する項) また 2 項目を $I^E(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e})$ と書くと

$$I^E(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) \;=\; 3\,\langle A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z})\,h|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij}|P_{34}\,h\,y_1\rangle \tag{64}$$

ここで $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \int d\mu(\boldsymbol{z}')\,A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z}')\,A_\gamma(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{z}')^*$ を用いて

$$\int d\boldsymbol{r}'\,A_\gamma(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{z}')^*\,\langle\boldsymbol{r}'|y_1\rangle = 2\sqrt{3}\,\langle A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z}')\,h|\widehat{\Phi}^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+)\rangle = I_N(\boldsymbol{z}',\boldsymbol{e}) = S_1\,(\boldsymbol{z}'^*\cdot\boldsymbol{e}) \tag{65}$$

を使うと

$$I^E(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) \;=\; 3\int d\mu(\boldsymbol{z}')\,\langle A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z})\,h|\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{5} v_{ij}|P_{34}\,A_\gamma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z}')\rangle\; I_N(\boldsymbol{z}',\boldsymbol{e}) \tag{66}$$

となる。必要な $(3q)(q\bar{q})$ GCM kernel は Eq. (49) に与えられている。そこで $\boldsymbol{z}'$ の 1 次の項を拾うと

$$\begin{aligned} I^E(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2\,\frac{1}{9}\,e^{-\frac{5}{24}\boldsymbol{z}^{*2}}\,\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\,S_1\,(\boldsymbol{z}^*\cdot\boldsymbol{e}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2\,\frac{1}{9\cdot 12}\,e^{-\frac{5}{24}\boldsymbol{z}^{*2}}\,I_N(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) \end{aligned} \tag{67}$$

結局 Eq. (37) で $(-1/6)$ の項を除き、$(-5/6)$ を $(-5/6+1/108)$ に変えればよい。

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) &= \langle\Psi^{\boldsymbol{z}}|PHQ|\Phi^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+)\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2\,\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{108}\right)\,e^{-\frac{5}{24}(\boldsymbol{z}^*)^2}\,I_N(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) \\ \text{with}\qquad & I_N(\boldsymbol{z},\boldsymbol{e}) = \langle\Psi^{\boldsymbol{z}}|\Phi^{\boldsymbol{e}}(\Theta^+)\rangle = S_1\,(\boldsymbol{z}^*\cdot\boldsymbol{e}) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}\,(\boldsymbol{z}^*\cdot\boldsymbol{e}) \end{aligned} \tag{68}$$

Born kernel への変換は再び Eq. (38) によって行われる。更に vertex function への変換を行うと、最終的に次の結果を得る。

$$\begin{aligned} f_{\Theta^+NK}(k) &= (-1)^{\frac{1}{2}+I_z}\,\left(\frac{1}{5}\sqrt{\frac{6\pi}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}\,\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{5}{2}}\,\left(\frac{m_K cb}{\hbar}\right)^{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{5}{12}(bk)^2}\,\left(\frac{\mathcal{E}}{\hbar c}\right) \\ \mathcal{E} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2\,\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{108}\right)\,\left(\frac{12}{17}\right)^{\frac{5}{2}}\,e^{\frac{5\cdot 5}{17\cdot 6}(bk)^2} \end{aligned} \tag{69}$$

or

$$f_{\Theta^+NK}(k) \;=\; (-1)^{\frac{1}{2}-I_z}\,\alpha_S\,\sqrt{x}\,\left(\frac{m_K}{m}\right)^{\frac{3}{2}}\,\left(\frac{2}{5}\sqrt{\frac{6}{5\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}\,\left(\frac{10}{17}\right)^{\frac{5}{2}}\,\frac{89}{108}\,e^{-\frac{7\cdot 5}{17\cdot 12}(bk)^2} \tag{70}$$

幅は Eq. (29) によって求められる。これらの式をみると Pentaquark state と $(3q)(q\bar{q})$ 配位との非直交性の効果は $-5/6\;:\;1/108 = -1/90$ と小さい事が分る。$b = 0.6$ fm,

$\sqrt{2/\pi}\,\alpha_S\,x^3\,mc^2 = 440$ MeV の時の matrix element $\mathcal{E}$ の大きさと coupling constant の大きさ、更に Pentaquark state の nK^+ 崩壊幅は

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -440 \times \frac{89}{108} \times 0.4186 \times 1.1790 = -179 \quad \text{MeV} \\
& \qquad f_{\Theta^+ nK^+}(k) = -0.549 \times \frac{179}{329} = -0.299 \sim 0.3 \\
\Gamma &= 167.4 \times f^2 = 167.4 \times (0.299)^2 = 14.9 \sim 15 \quad \text{MeV} \qquad (71)
\end{aligned}$$

結論として、Pentaquark state が 1540 MeV 近傍に現れる限り、その nK^+ への崩壊幅は Kapur-Peierls の方法を用いても Feshbach の projection method を用いても 14 $\sim$ 15 MeV 程度の大きさを実現出来る事が分かる。