平成 12 年度「物理数学」(前期) 試験問題 (H12.9.27 実施)

1) (解析性) 複素数値函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ を 2 実変数 x、y の函数として考察する。$f(z)$ が実軸上 $(y = 0)$ で無限回連続的微分可能な実函数であっても $f(z)$ は全複素平面では必ずしも解析的ではない。その様な $f(z)$ の例をあげて、それに対して Cauchy の積分定理

$$\int_C f(z)\,d\,z = 0 \qquad (C \text{ は任意の contour})$$

が成り立たない事を示せ。

2) (主値積分、湯川函数) 実数 $s \in \boldsymbol{R}$ に対して、複素積分 $\int_C e^{isz}/z\,d\,z$ を考える。

(i) contour C として、原点を中心とする半径 ε (> 0) と ρ $(> \varepsilon)$ の 2 つの半円とそれらを結ぶ直線を考える事により、次の関係式を示せ。

$$\lim_{\rho\to\infty} \mathcal{P}\int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{ist}}{t}\,d\,t = \begin{cases} i\pi \\ 0 \\ -i\pi \end{cases} \quad \text{for} \quad \begin{cases} s > 0 \\ s = 0 \\ s < 0 \end{cases}$$

(注：$\mathcal{P}\int_{-\rho}^{\rho} f(t)\,d\,t = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\rho}^{-\varepsilon} f(t)\,d\,t + \int_{\varepsilon}^{\rho} f(t)\,d\,t\right\}$ は主値積分である。)

(ii) $\alpha > 0$ の時、contour C として原点を避ける小さな半円を持つ、実軸に平行な長方形を考える事により、次の関係式を示せ。

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho} \frac{e^{is(t-i\alpha)}}{t - i\alpha}\,d\,t = \pi i + \lim_{\rho\to\infty}\mathcal{P}\int_{-\rho}^{\rho}\frac{e^{ist}}{t}\,d\,t$$

(iii) (i) と (ii) から導かれる関係式を用いて、$1/(\boldsymbol{q}^2 + m^2)$ ($m > 0$ は質量) の空間 3 次元 Fourier 積分

$$Y(\boldsymbol{r}) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{q}^2 + m^2}\,d\,\boldsymbol{q}$$

が湯川函数 $Y(\boldsymbol{r}) = e^{-mr}/r$ $(r = |\boldsymbol{r}| > 0)$ となる事を示せ。

3) (Contour 積分)

$$\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-tz})\frac{dt}{t} = \lim_{\rho\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\rho (e^{-t} - e^{-tz})\frac{dt}{t} = \log z \qquad \text{for} \qquad \Re e z > 0$$

を下図の様な contour を考える事によって示せ。