平成 14 年度「物理数学」(前期) 試験問題 (H14.7.17 実施)

I. (解析性)

領域 D で定義された解析函数 (正則函数) $f(z)$ の性質を 5 つ述べ、それぞれについて簡単に説明せよ。

II. (Γ-函数と B-函数の関係)

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad (\,x,\ y>0\,)$$

を示せ。ここに

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad , \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (\,x,\ y>0\,)$$

III. (Hermite 多項式の母関数と積分表示式)

Hermite 多項式は、$x \in (-\infty,\infty)$ として

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

で定義される。

1) $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ の具体的な表式を求めよ。(n 次の多項式である。)

2) 公式、$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!}[A,B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \cdots$ (ここに、$[A,B] = AB - BA$ 等) を用いて、Hermite 多項式の母関数展開

$$w(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} H_n(x) t^n$$

が成り立つことを示せ。また、これを t についてのベキ級数と見たとき、その収束半径はいくらか ?

3) $e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2xui} du$ と書ける事を用いて、Hermite 多項式の積分表示式

$$H_n(x) = (-i)^n \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2xui} u^n du$$

を示せ。

4) 3) の結果を用いて、もう一つの母関数展開

$$W(x,y,t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left\{-\frac{(x^2+y^2)t^2-2xyt}{1-t^2}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n\,!}H_n(x)H_n(y)t^n$$

が成り立つことを示せ。ここに、$|t|<1$ である。

(注) a を正の実数 $(a>0)$、b を任意の複素数とする時、一般に普通の実数の時と同じ Gauss 積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-au^2+bu}du=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{b^2}{4a}}$$

が成り立つ。

IV. (Euler の公式)

$|q|<1$ の時、$|z|<1$ に対して、Euler の公式

$$\frac{1}{(1-z)(1-zq)(1-zq^2)(1-zq^3)\cdots}$$
$$=1+\frac{1}{(1-q)}z+\frac{1}{(1-q)(1-q^2)}z^2+\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}z^3+\cdots$$

が成り立つ事を次の手順に従って示せ。

a を任意の実数として

$$h_a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})(1-q^{a+2})\cdots(1-q^{a+n-1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^n)}z^n$$

とする。(1 項目=1 とする。収束半径 1 のベキ級数である。)

1) $h_a(z)-h_{a+1}(z)=-zq^a h_{a+1}(z)$ を示せ。

2) $h_a(z)-h_a(qz)=z(1-q^a)h_{a+1}(z)$ を示せ。

3) これらから、$h_a(z)=\frac{1-zq^a}{1-z}h_a(qz)$ を示し、これを n 回繰り返し、そのあと $n\to\infty$ とすることによって

$$h_a(z)=\frac{(1-zq^a)(1-zq^{a+1})(1-zq^{a+2})\cdots(1-zq^{a+n-1})\cdots}{(1-z)(1-zq)(1-zq^2)\cdots(1-zq^{n-1})\cdots}$$

と書ける事を示せ。

4) これらから、$a\to\infty$ とすることにより、Euler の公式を証明せよ。

5) $h_a(z)$ の等式で、$z\to zq^{-a}$ と変えて、そのあと $a\to-\infty$ とすることにより

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots(1-q^n)}z^n=(1+z)(1+zq)(1+zq^2)\cdots$$

が成り立つ事を示せ。