平成 15 年度「物理数学」(前期) 試験問題

藤原義和 担当

H15.7.23 実施

I. (解析性)

解析函数の解析性 (正則性) が崩れる点を特異点という。解析函数の特異点が三つに分類されることを例をあげて説明し、それぞれ、どの様な特徴があるか述べよ。

II. (解析函数の最大値の原理、最小値の原理)

$f(z)$ が領域 D で解析的である時、Cauchy の積分公式を用いて平均値の定理

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

を示し、それを使って解析函数の最大値の原理、最小値の原理「D 内の任意の有界閉域 $[K]$ において、$|f(z)|$ はその最大値を $[K]$ の境界上においてとる。また $[K]$ において $f(z) \neq 0$ なら $|f(z)|$ はその最小値を境界上においてとる」を証明せよ。

III. (Γ-函数の 2 倍公式)

Γ-函数

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \qquad (\Re e\ z > 0)$$

に対する Legendre の 2 倍公式

$$\sqrt{\pi}\, \Gamma(2z) = 2^{2z-1}\, \Gamma(z)\, \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

を証明せよ。必要ならば

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots 3 \cdots (n-1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)} n^z \qquad (\text{Euler の公式})$$

$$\psi'(z) = \frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n}\right)^2 \qquad (\psi(z)\ \text{は、ポリ}\Gamma-\text{函数})$$

等を用いてもよい。

以上